



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

TESI MAGISTRALE

Su un articolo di A. Thuillier:
“Géométrie toroïdale et géométrie
analytique non archimédienne.
Application au type d’homotopie de
certains schémas formels”

“Geometria toroidale e geometria analitica non archimedea. Applicazione al
tipo d’omotopia di alcuni schemi formali”

Giulia Battiston

RELATORE:

Prof. Rita Pardini

30 SETTEMBRE 2011

Indice

Introduzione	1
1 Spazio di Berkovich associato a un k-schema formale localmente algebrico	2
1.1 Spazi analitici	2
1.2 Gli spazi analitici X^{an} e $\mathfrak{X}^\triangleright$	8
2 Spazio di Berkovich di una varietà torica	18
2.1 Le applicazioni \mathbf{p} e p	18
2.2 Il ventaglio conico nello spazio di Berkovich di una varietà torica	23
2.3 L'omotopia tra \mathbf{p} e $id_{\mathfrak{X}^\triangleright}$	27
2.4 Un esempio pratico: $\mathbb{P}_k^{2,an}$	30
3 Il ventaglio di un'immersione toroidale, applicazione ai divisori a intersezione trasversa	37
3.1 La costruzione del ventaglio per un'immersione toroidale semplice	37
3.2 L'omotopia su un'immersione toroidale semplice	43
3.3 La costruzione nel caso di immersioni toroidali generiche	46
3.4 Applicazione ai divisori a intersezione trasversa	49
3.5 Applicazione al completato formale di uno schema lungo un divisore a intersezione trasversa	54

Introduzione

Scopo di questa tesi è lo studio di un articolo di A.Thuillier, “Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d’homotopie de certains schémas formels” (Manuscripta Math. 123, 381-451, 2007). In particolare, questo lavoro non si esaurisce nel semplice riassunto dell’articolo ma si propone di presentare esempi interessanti e di dare qualche chiarimento laddove è sembrato necessario per una comprensione più agevole dei risultati da parte del lettore.

Se x è un punto singolare isolato in una varietà localmente algebrica X su un campo k di caratteristica zero, un teorema di Hironaka garantisce l’esistenza di un ideale I a supporto in x tale che l’immagine inversa di x nel blow-up di X su I sia un divisore a incroci normali semplici. Se il blow-up è fatto lungo due ideali diversi, e i due divisori eccezionali sono entrambi a incroci normali semplici, quali legami esistono tra i due? Stepanov ha dimostrato che abbiamo un ottimo controllo dei complessi di incidenza dei due divisori, dal momento che essi sono omotopicamente equivalenti.

Utilizzando metodi completamente diversi arriveremo a dimostrare la seguente generalizzazione:

Teorema (Thuillier). *Sia X un k -schema localmente algebrico con k campo perfetto e $Y \subset X$ un sottoschema chiuso. Se $f_1 : X_1 \rightarrow X$ (e $f_2 : X_2 \rightarrow X$) è un morfismo proprio che realizza un isomorfismo tra $X_1 - f_1^{-1}(Y)$ (rispettivamente $X_2 - f_2^{-1}(Y)$) e $X - Y$, e se le immagini inverse di Y tramite f_1 e f_2 sono divisori a intersezione trasversa, allora gli spazi topologici $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$ e $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$ sono in modo canonico omotopicamente equivalenti.*

Questa è una generalizzazione sotto molti aspetti del risultato ottenuto da Stepanov: la caratteristica del campo non è necessariamente zero, non si tiene conto solamente di punti singolari ma di un sottospazio chiuso qualunque e i morfismi non si limitano più a essere esclusivamente degli scoppiamenti.

In effetti dimostreremo che i due complessi simpliciali sono entrambi omotopicamente equivalenti a \mathfrak{X}_η , la fibra generica (che definiremo nel primo capitolo) del completamento di X lungo Y e questo ci permetterà di dare un'equivalenza di omotopia tra i due.

Colgo l'occasione per ringraziare calorosamente la Prof.ssa Rita Pardini per la grande disponibilità con cui mi ha seguita, in sinergia con il Prof. Angelo Vistoli e per i loro preziosi consigli. Ringrazio allo stesso modo quanti nel Dipartimento di Matematica di Pisa hanno reso possibile questa tesi, in particolare il Prof. Vladimir Georgiev per la serietà e l'attenzione con cui segue le esigenze degli studenti e la Sig.ra Carla Spinelli per il suo lavoro sempre puntuale e la sua pazienza.

In questi anni molte sono state le persone che hanno sostenuto il cammino che mi ha portata a questa tesi. Ringrazio ognuno di loro per aver creduto nelle mie capacità e avermi sostenuto ciascuno nel suo modo unico, un ringraziamento particolare va a mia nonna Silvia che per tutti questi anni ha avuto e mi ha insegnato la pazienza e a mia mamma Maria che non ha mai esitato a sostenermi nella mia crescita culturale.

Vorrei infine ricordare qui mio nonno Giovanni che è ha seminato tanto e tanto bene da farmi ancora incontrare continuamente i frutti del suo bel lavoro.

Capitolo 1

Spazio di Berkovich associato a un k -schema formale localmente algebrico

In questo capitolo introdurremo le nozioni fondamentali della teoria di Berkovich e associeremo in maniera funtoriale a un k -schema formale localmente algebrico \mathfrak{X} uno spazio analitico \mathfrak{X}^\natural , detto il suo *spazio di Berkovich*, per fare questo considereremo su k la valutazione banale:

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Associeremo a \mathfrak{X} un ulteriore oggetto, la sua *fibra generica* \mathfrak{X}_η , sottospazio k -analitico di \mathfrak{X}^\natural .

1.1 Spazi analitici

Prima di procedere alla costruzione dello spazio di Berkovich associato a \mathfrak{X} , vediamo di fare qualche piccolo richiamo sugli spazi analitici. Tutti gli anelli considerati in questa tesi sono commutativi, con identità; le norme sono sempre a valori reali.

Definizione 1.1.1. *Un anello di Banach è un anello normato che sia completo rispetto a tale norma; dato un campo normato completo k , una k -algebra di Banach è una k -algebra completa \mathcal{A} tale che il morfismo di struttura $f : k \rightarrow \mathcal{A}$ sia limitato, ovvero esista $A \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $c \in \mathcal{A}$ si abbia $|f(c)| \leq A|c|$.*

In generale, possiamo definire le \mathcal{A} -algebre di Banach e gli \mathcal{A} -moduli di Banach, sempre imponendo ai morfismi tra oggetti normati di essere limitati. Da questo momento lavoreremo esclusivamente con (semi)norme e (semi)valutazioni *non archimedee*, ovvero norme tali che $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Definizione 1.1.2. Una k -algebra di Banach \mathcal{A} è affinoide se esistono $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}^+$ e un morfismo surgettivo

$$k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} \longrightarrow \mathcal{A}$$

dove $k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} \subset k[[T_1, \dots, T_n]]$ è la k -algebra di Banach delle serie convergenti nel polidisco di poliraggio r_1, \dots, r_n , ovvero, dato che la norma è non archimedea, la k -algebra delle serie formali $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T_1^{\nu_1} \dots T_n^{\nu_n}$ tali che $|a_\nu| r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n} \rightarrow 0$ quando $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n \rightarrow +\infty$, sui cui consideriamo la norma $|f| = \max_\nu |a_\nu| r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n}$. L'algebra \mathcal{A} è strettamente affinoide se i r_i possono essere scelti in $|k^*|$ il che equivale a poter prendere $r_i = 1$ per ogni i .

Esempio 1.1.3. Nella categoria degli anelli di Banach i morfismo sono limitati: per esempio se consideriamo su k la valutazione banale il morfismo

$$k\{T\} \rightarrow k\{r^{-1}T\}$$

$$T \mapsto T$$

non è ammissibile per $r > 1$, dato che $|T^n| = 1$ in $k\{T\}$ e $|T^n| = r^n$ in $k\{r^{-1}T\}$, nonostante il due k -algebre siano isomorfe a $k[T]$ come algebre.

La norma del max sulle algebre affinoidi è moltiplicativa se e solo se l'algebra è ridotta, in questo caso corrisponde alla *seminorma spettrale* definita come

$$\rho(f) = \inf_n |f^n|^{1/n}$$

che è dunque, in questo caso, una norma (di più, è una valutazione, ovvero una norma moltiplicativa).

Esempio 1.1.4. Se l'algebra non è ridotta, la norma del max non è moltiplicativa: ad esempio se consideriamo $k\{T\}/T^2$ con k munito della valutazione banale, $|T| = 1$ ma $0 = |T^2| < |T||T|$.

Definizione 1.1.5. Sia $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ un'algebra di Banach e $|\cdot|'$ una seminorma su \mathcal{A} , allora $|\cdot|'$ è limitata se esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{A}$ si abbia $|f|' \leq C|f|$. Lo spettro di \mathcal{A} è l'insieme

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\text{seminorme moltiplicative su } \mathcal{A} \text{ limitate rispetto a } |\cdot|\}.$$

Se al punto $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ corrisponde la seminorma $|\cdot|_x$ utilizzeremo equivalentemente la notazione $|f|_x$ o $|f(x)|$, per ogni $f \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A} \neq \{0\}$ lo spettro di \mathcal{A} è diverso dall'insieme vuoto, inoltre se lo si munisce della topologia generata dalle $x \mapsto |f(x)|, f \in \mathcal{A}$ allora tale spazio topologico è compatto e di Hausdorff. Ogni omomorfismo limitato di algebre di Banach $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induce tramite composizione un'applicazione continua $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Nel caso di un'algebra affinoide ridotta, la norma spettrale è un punto dello spettro dell'anello e corrisponde a un punto ξ con la seguente proprietà:

$$|f(\xi)| = \max_{\mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)|.$$

D'ora in poi supporremo che l'algebra \mathcal{A} sia affinoide.

Osservazione 1.1.6. Sia $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e sia $|\cdot|$ la norma su \mathcal{A} allora per definizione (ovvero dato che $|\cdot|_x$ è limitata e moltiplicativa) esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{A}$ si abbia $|f|_x \leq C|f|$, e quindi $|f^n|_x \leq C|f^n|$ e $|f|_x \leq \sqrt[n]{C}|f|$ per ogni n , dunque $|f|_x \leq |f|$.

Definizione 1.1.7. Un sottoinsieme V di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è un dominio affinoide se esistono una k -algebra affinoide \mathcal{A}_V e un omomorfismo limitato di k -algebre affinoidi $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$ tali che per ogni k -algebra affinoide \mathcal{B} e ogni k -omomorfismo limitato $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tale che l'immagine del morfismo indotto $\mathcal{M}(\psi) : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sia contenuta in V esiste uno e un solo k -omomorfismo limitato $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{B}$ che renda commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A}_V \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Si verifica facilmente che in tal caso $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \xrightarrow{\sim} V \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Un sottoinsieme U di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è un dominio analitico se ammette un ricoprimento di domini affinoidi V_i tale che per ogni \mathcal{B} k -algebra e ogni omomorfismo limitato $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tale che l'immagine del morfismo indotto $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sia contenuta in U questa sia ricoperta da un numero finito dei V_i .

Esempio 1.1.8. i) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è evidentemente un dominio affinoide.

ii) Se $V \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ e $W \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A}_W)$ sono due domini affinoidi entrambi contenuti in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, allora $V \cap W$ è un dominio affinoide isomorfo allo spettro di $\mathcal{A}_V \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_W$.

Per esempio se $\mathcal{A} = \{T\}$ e $r, s \in r < s$

$$Z = \{x \in \mathcal{M}(k\{T\}) \mid \frac{1}{3} \leq |x(T)| \leq \frac{2}{3}\}$$

è l'intersezione di U e V dove

$$U = \{x \in \mathcal{M}(k\{T\}) \mid |x(T)| \leq \frac{2}{3}\},$$

$$V = \{x \in \mathcal{M}(k\{T\}) \mid \frac{1}{3} \leq |x(T)|\}$$

e le algebre affinoidi associate sono rispettivamente

$$\mathcal{A}_U = k\{T, \frac{3}{2}S\}/(T - S) = k\{\frac{3}{2}T\} \text{ e } \mathcal{A}_V = k\{T, \frac{1}{2}U\}/(UT - 1)$$

e dunque

$$\mathcal{A}_Z = k\{T, \frac{3}{2}S, \frac{1}{2}U\}/(T - S, TU - 1) = k\{\frac{3}{2}S, \frac{1}{2}U\}/(SU - 1).$$

iii) Invece, se $V \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $W \simeq \mathcal{M}(\mathcal{B})$ sono due domini affinoidi in generale $U \cup V$ non è un dominio affinoide pur essendo evidentemente un dominio analitico, ne è un esempio l'unione di U e V , descritti al punto precedente:

$$Z = \{x \in \mathcal{M}(k\{T\}) \mid |x(T)| \leq 1/3 \vee |x(T)| \geq 2/3\}.$$

Possiamo munire $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ di una struttura di sito X_G per mezzo della G-topologia i cui oggetti siano i domini analitici. I ricoprimenti ammissibili di un dominio analitico U sono i ricoprimenti per mezzo di domini analitici U_i tali che per ogni k -algebra \mathcal{B} e ogni morfismo limitato $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tale che l'immagine del morfismo indotto $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sia contenuta in U esista un ricoprimento affinoide finito di $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ che raffini il ricoprimento $\{\varphi^{-1}(U_i)\}$.

Il teorema di aciclicità di Tate garantisce allora l'esistenza (e l'unicità) di un fascio di k -algebre \mathcal{O}_{X_G} tale che $\mathcal{O}_{X_G}(V) = \mathcal{A}_V$ per ogni dominio affinoide V di X e che se $W \subset V$ sono due domini affinoidi di X allora l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_{X_G}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X_G}(W)$ è indotto dal k -omomorfismo limitato $\mathcal{A}_W \rightarrow \mathcal{A}_V$ che fattorizza $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_W$.

Dato che ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorno affinoidi, ogni aperto di X è un dominio analitico, e ogni ricoprimento aperto è ammissibile. Si ha dunque un morfismo di siti $\pi : X_G \rightarrow X$ che ci permette

di definire il fascio $\mathcal{O}_X = \pi_* \mathcal{O}_{X_G}$, tale fascio altro non è che la restrizione triviale di \mathcal{O}_{X_G} , ovvero $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X_G}(U)$ per ogni U aperto di X . Le fibre dei due fasci sono anelli locali, dunque $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è uno spazio localmente anellato.

Per definizione $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{A}$, e quindi esiste un morfismo di spazi localmente anellati $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ indotto dal morfismo tra anelli $\text{Id}_{\mathcal{A}}$. A livello degli spazi topologici $\rho_{\mathcal{A}}$ manda una seminorma sul suo nucleo.

Se \mathcal{A} è un'algebra *strettamente affinoide* definiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^o &= \{f \in \mathcal{A} \mid |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\ \mathcal{A}^{oo} &= \{f \in \mathcal{A} \mid |f(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\ \tilde{\mathcal{A}} &= \mathcal{A}^o / \mathcal{A}^{oo}\end{aligned}$$

esiste allora un'applicazione di riduzione tra siti localmente anellati

$$r_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{A}^o)$$

univocamente determinata dalla condizione che per ogni $f \in \mathcal{A}$ si abbia $r_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathfrak{D}(f)) = \{|f| = 1\}$, con $\mathfrak{D}(f) = \mathcal{D}(f) \cap \text{Spf}(\mathcal{A}^o)$, e che

$$\mathcal{O}_{\text{Spf}(\mathcal{A}^o)}(\mathfrak{D}(f)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}(r_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathfrak{D}(f)))$$

sia l'omomorfismo canonico

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\{f\}}^o &\rightarrow \mathcal{A}\{T\}/(fT - 1) \\ f &\mapsto T.\end{aligned}$$

A livello degli spazi topologici, se x è un punto di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ corrispondente alla seminorma $|\cdot|_x$, allora il suo nucleo \mathfrak{p}_x è un ideale primo; la norma $|\cdot|_x$ è ben definita su $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ e dato che questo è un dominio di integrità, tale norma si estende al campo dei quozienti e quindi al suo completato $\mathcal{H}(x)$, si ha quindi un omomorfismo limitato $\chi_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$ che induce

$$\tilde{\chi}_x : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}.$$

L'applicazione di riduzione associa allora a x il nucleo di $\tilde{\chi}_x$ che è un ideale primo di $\tilde{\mathcal{A}}$ (dato che $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ è un campo), e dunque un punto di $\text{Spf}(\mathcal{A}^o)$. L'applicazione così definita è anticontinua, ovvero l'immagine inversa di un aperto è un chiuso.

Se quindi la seminorma spettrale è moltiplicativa (e corrisponde dunque a un punto in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$), allora è contenuta in ogni aperto di Zariski non vuoto di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ dove chiamiamo aperti di Zariski sullo spettro analitico $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ le preimmagini tramite $\rho_{\mathcal{A}}$ degli aperti di Zariski di $\text{Spec}(\mathcal{A})$.

Osservazione 1.1.9. *Si noti che perfino se la norma dell'algebra strettamente affinoide è triviale, cosa che avremo bisogno di supporre a breve, le due applicazioni $\rho_{\mathcal{A}}$ e $r_{\mathcal{A}}$ non coincidono neppure come applicazioni topologiche. Infatti, in generale, se f è un elemento di \mathcal{A} e $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ è una semivalutazione, $|f(x)| = 0$ se e solo se $\rho_{\mathcal{A}}(x) \notin \mathcal{D}(f)$ e quindi*

$$r_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(f))^{-1} = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid |f(x)| = 1\}$$

$$\rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(f))^{-1} = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid |f(x)| \neq 0\}.$$

Più precisamente, se la norma di \mathcal{A} è banale, si ha che, per ogni $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$,

$$r_{\mathcal{A}}(x) = \{f \in \mathcal{A} \mid |f(x)| < 1\} \quad \text{e} \quad \rho_{\mathcal{A}}(x) = \{f \in \mathcal{A} \mid |f(x)| = 0\}.$$

C'è inoltre uno stretto legame tra la proprietà del massimo della norma spettrale su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (quando è moltiplicativa) e i punti generici delle componenti irriducibili di $\text{Spf}(\mathcal{A}^0)$ (il cui spazio topologico sottostante, lo ricordiamo, è omeomorfo a quello di $\text{Spec}(\mathcal{A})$): l'immagine inversa di uno di questi punti generici tramite $r_{\mathcal{A}}$ è un singoletto e l'insieme di questi punti ha la proprietà di essere il più piccolo sottoinsieme di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sul quale ogni $|f(x)|$, $f \in \mathcal{A}$ raggiunge il suo massimo. Questo insieme, indicato con $\Gamma(X)$, è il *bordo di Shilov* di $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Inoltre il bordo di Shilov ha la proprietà che se K/k è un'estensione non archimedeica allora $\Gamma(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ è l'immagine di $\Gamma(\mathcal{M}(\mathcal{A}) \hat{\otimes}_k K)$ tramite la proiezione canonica.

Essendo i domini affinoidi compatti e di Hausdorff, vorremmo incollarli per ottenere uno spazio topologico che sia localmente compatto e di Hausdorff. Ora, incollare oggetti compatti è tutt'altro che banale: la nozione di locale, infatti, è solitamente legata agli aperti mentre in questo caso vogliamo lavorare con i compatti; è dunque necessario porre delle condizioni supplementari sull'insieme dei domini affinoidi e sui ricoprimenti ammissibili.

Definizione 1.1.10. *Uno spazio analitico X è un spazio topologico localmente compatto, di Hausdorff e connesso per archi munito di una collezione V_i di sottoinsiemi compatti (i domini affinoidi) ognuno dei quali omeomorfo a un certo $\mathcal{M}(\mathcal{B}_{V_i})$, con \mathcal{B}_{V_i} affinoide. Tali omeomorfismi devono essere compatibili con le restrizioni e se $U \subset V_i$, con $V_i \simeq \mathcal{M}(\mathcal{B}_{V_i})$ dominio affinoide, allora U è a sua volta un dominio affinoide se e solo se lo è come sottoinsieme di $\mathcal{M}(\mathcal{B}_{V_i})$ nel senso della prima definizione (con gli spazi identificati tramite gli omeomorfismi). Inoltre tale collezione deve soddisfare delle condizioni sui ricoprimenti: diciamo che U sottoinsieme di X è un dominio analitico se è*

G-ricoperto dalla collezione dei V_i , ovvero per ogni $x \in U$ esistono i_1, \dots, i_n tali che $x \in \cap_j V_{i_j}$ e che $\cup_j V_{i_j}$ sia un intorno di x ; chiediamo allora che X sia un dominio analitico e che l'intersezione di due domini affinoidi sia un dominio analitico. Lo spazio topologico X possiede dunque una topologia di Grothendieck, che ha per oggetti i domini analitici e per la quale un ricoprimento è ammissibile solo se ammette un raffinamento $\{U_i\}$ tale che ogni punto y ammetta un intorno $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ con $y \in \cap U_{i_j}$; indichiamo con X_G lo spazio X munito di questa struttura di sito.

Un spazio analitico ha una struttura di spazio localmente anellato: sul sito X_G c'è il fascio di k -algebre \mathcal{O}_{X_G} definito come $\mathcal{O}_{X_G}(V) = \mathcal{A}_V$ su ogni dominio affinoide; il pull back di \mathcal{O}_{X_G} è allora un fascio su X , e questo ne fa uno spazio localmente anellato.

Ad ogni punto x di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è associato $\mathcal{H}(x)$, estensione di k , e dato che se $V \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$ è il morfismo canonico allora le estensioni associate rispetto alle due algebre affinoidi sono isomorfe, possiamo associare a ogni punto di uno spazio analitico il campo non archimedeo $\mathcal{H}(x)$ cononderando un qualunque dominio affinoide contenente x .

1.2 Gli spazi analitici X^{an} e \mathfrak{X}^\flat

Sia dunque k un campo munito di una valutazione non archimedeo, abbiamo ora gli strumenti che ci permettono di definire l'analitificato di un k -schema localmente algebrico e lo spazio di Berkovich associato a un k^o -schema formale localmente di tipo finito.

Definizione 1.2.1. *Se X è un k -schema localmente algebrico, allora il funtore $Mor_{loc.an.}(\cdot, X)$ che ad uno spazio k -analitico Y associa l'insieme dei morfismi di spazi localmente anellati tra Y e X è rappresentabile da uno spazio analitico che indichiamo con X^{an} e un morfismo di spazi localmente anellati $\rho_X : X^{an} \rightarrow X$.*

Se ad esempio X è $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$ con k campo munito di una norma non archimedeo che indicheremo con $|\cdot|$, allora X^{an} è lo spazio k -analitico delle seminorme moltiplicative $|\cdot|_x$ su $k[T_1, \dots, T_n]$ che ristrette a k siano limitate, di costante 1 (per l'Osservazione 1.1.6). Ora, dal momento che k è un campo, se esistesse $f \in k$ tale che $|f|_x < |f|$ allora si avrebbe $|f^{-1}|_x > |f^{-1}|$, il che è assurdo. Dunque X^{an} è lo spazio delle seminorme moltiplicative su $k[T_1, \dots, T_n]$ che ristrette a k coincidono con $|\cdot|$. Se Y è della forma $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])/I$ allora Y^{an} è il sottospazio chiuso di X^{an}

definito dal fascio $I\mathcal{O}_{X^{an}}$. Un buon incollamento nel caso generale è garantito dalla definizione tramite proprietà universale.

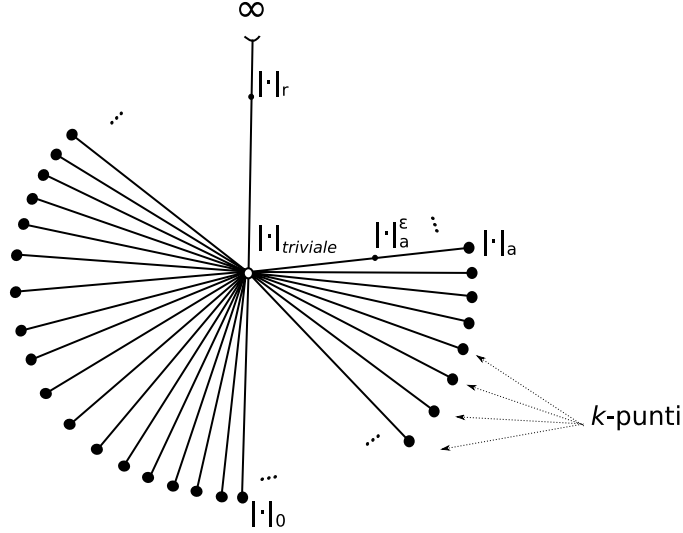


Figura 1.1: La retta analitica nel caso di k munito della valutazione banale e algebricamente chiuso: per ogni $a \in k$, $|\cdot|_a^\epsilon$, con $0 < \epsilon < 1$, è la valutazione che a $F(T) = (T-a)^n G(T)$, $T-a \nmid G(T)$ associa ϵ^n , $|\cdot|_a$ è la semivalutazione che estende quella banale su $k[T]/(T-a)$ e $|\cdot|_r$ per ogni $r > 1$ associa a $F(T)$ il numero reale $r^{\deg F}$

Definizione 1.2.2. Sia k un campo normato, un anello normato è detto topologicamente di presentazione finita su k^o se è della forma $k^o\{T_1, \dots, T_n\}/I$ con I ideale di tipo finito.

Definizione 1.2.3. Se \mathfrak{X} è un k^o -schema formale localmente di presentazione finita (ovvero localmente unione finita di schemi formali affini d'anelli topologicamente di presentazione finita su k^o), allora il funtore $\text{Mor}_{k^o\text{-ann.}}^b(\cdot, \mathfrak{X})$ che ad uno spazio k -analitico Y associa l'insieme dei morfismi di siti k^o -anellati $\varphi : Y_G \rightarrow \mathfrak{X}$ tali che:

- per ogni aperto affine U di \mathfrak{X} e ogni dominio affinoide V di Y con $\varphi(V) \subset (U)$ il morfismo $\varphi^\# \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_G}(V)$ sia limitato, ovvero $|\varphi^\#(a)| \leq 1$ per ogni $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$
- per ogni punto $y \in Y$ l'immagine tramite $\varphi_y^\#$ di $m_{\varphi(y)}$ è contenuta in $\{a \in \mathcal{O}_{Y_G, y} \mid |a(y)| < 1\}$

è rappresentabile da uno spazio k -analitico, che indichiamo con $\mathfrak{X}^\triangleright$ e chiamiamo il suo spazio di Berkovich associato, e un morfismo di siti $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}$.

Se $\mathcal{A} = k^o\{T_1, \dots, T_n\}/I$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} k \simeq k\{T_1, \dots, T_n\}/kI$ allora $\mathfrak{X}^\triangleright = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Al solito, il buon incollamento è garantito dalla definizione come proprietà universale.

Definizione 1.2.4. *Sia \mathfrak{X} un k^o -schema formale localmente di presentazione finita e sia \mathfrak{X}_s lo spazio anellato $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}_{\mathfrak{X}})$, con $\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ ideale massimale di definizione di $|\mathfrak{X}|$ su X , allora tale spazio anellato è uno schema di tipo localmente finito su \tilde{k} , detto la fibra speciale di \mathfrak{X} .*

Osservazione 1.2.5. *Se $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = k^o\{T\}/(T^n)$ allora*

$$\mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} \tilde{k} = \tilde{k}\{T\}/\tilde{k}(T^n)$$

mentre

$$\widetilde{\mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} k} = \tilde{k},$$

infatti la norma spettrale di T^m è nulla per ogni m .

Se \mathcal{A} è un anello topologicamente di tipo finito su k^o si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^\triangleright = \mathcal{M}(\mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} k) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{r_{\mathrm{Spf}(\mathcal{A})}} & \mathrm{Spf}(\mathcal{A}) = \mathfrak{X} \\ \downarrow r_{\mathcal{A}} & \nearrow i & \\ \mathrm{Spf}(\mathcal{A}^o) = \mathrm{Spf}((\mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} k)^o), & & \end{array}$$

con i indotto da $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \hat{\otimes}_{k^o} k = \mathcal{A}$ (è ben definito dato che l'immagine di quest'ultimo è contenuta in \mathcal{A}^o).

Vorremmo a questo punto estendere la costruzione dello spazio di Berkovich associato, fatta fin'ora solo sui k^o -schemi formali localmente di presentazione finita, a tutti gli schemi formali localmente algebrici, ovvero ottenuti da uno schema localmente algebrico completandolo lungo un suo sottoschema chiuso. Per fare questo, come anticipato, è necessario supporre che la valutazione su k sia banale.

Osservazione 1.2.6. *Se k è munito della valutazione banale possiamo da un lato associare a X il suo analitificato X^{an} dall'altro possiamo cononderare*

X come un schema formale localmente di presentazione finita su $k^o = k$ e dunque associargli il suo spazio di Berkovich, utilizzando principalmente il fatto che se su k la norma è banale $k^o\{T_1, \dots, T_n\} \simeq k[T_1, \dots, T_n]$, dove quest'ultimo è completo rispetto alla norma banale.

Tranne quando specificato diversamente, d'ora in poi supporremo dunque che la valutazione su k sia quella banale, sia allora \mathfrak{X} un k -schema formale localmente algebrico (cioè uno schema formale localmente isomorfo al completamento di un k -schema localmente algebrico lungo un suo sottoschema chiuso).

Consideriamo il funtore $\varphi_{\mathfrak{X}} = \text{Mor}_{k\text{-ann.}}^{b,0}(\cdot, \mathfrak{X})$ che ad uno spazio k -analitico Y associa l'insieme dei morfismi di siti k^o -anellati $\varphi : Y_G \rightarrow \mathfrak{X}$ tali che:

- per ogni aperto affine U di \mathfrak{X} e ogni dominio affinoide V di Y con $\varphi(V) \subset (U)$ si abbia $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_G}(V)$ continuo e limitato, ovvero $|\varphi^\#(a)| \leq 1$ per ogni $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$
- per ogni punto $y \in Y$ l'immagine tramite $\varphi_y^\#$ di $m_{\varphi(y)}$ è contenuta in $\{a \in \mathcal{O}_{Y_G, y} \mid |a(y)| < 1\}$.

Se osservi che l'ultima condizione garantisce che risulti ben definito un omomorfismo locale da $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \varphi(y)}$ in $\mathcal{H}(y)^o$.

Proposizione 1.2.7. *Il funtore $\varphi_{\mathfrak{X}} = \text{Mor}_{k\text{-ann.}}^{b,0}(\cdot, \mathfrak{X})$ è rappresentabile da uno spazio k -analitico $\mathfrak{X}^\triangleright$ e un morfismo limitato di siti k -anellati $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_G^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}$*

Dimostrazione. Se \mathfrak{X} è un k -schema localmente algebrico dall'Osservazione 1.2.6 si deduce immediatamente $\text{Spec}(\mathcal{A})^\triangleright = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ (\mathcal{A} è un'algebra di Banach per la norma banale), $r_{\mathfrak{X}} = r_{\mathcal{A}}$ e la costruzione si ottiene esattamente come per il caso degli schemi localmente di presentazione finita.

Se $\mathfrak{X} = \text{Spf}(\hat{\mathcal{A}})$ è il completato di $\text{Spec}(\mathcal{A})$ lungo il sottoschema chiuso Y definito da \mathcal{I} di modo che $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ sia il fascificato di $\hat{\mathcal{A}}$ (dove $\hat{\mathcal{A}}$ è sempre il completato di \mathcal{A} rispetto alla topologia \mathcal{I} -adica) allora $\mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ induce $j : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ e $\mathfrak{X}^\triangleright$ è lo spazio k -analitico indotto da $\text{Spec}(\mathcal{A})^\triangleright$ sull'aperto $r_{\mathcal{A}}^{-1}(Y)$ e il morfismo $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}$ non è altro che la restrizione di $r_{\mathcal{A}} = r_{\text{Spec}(\mathcal{A})}$.

Nel caso di \mathfrak{X} qualunque i morfismi di incollamento degli schemi formali affini \mathfrak{X}_U forniscono quelli per il rincollamenti degli spazi di Berkovich associati $\mathfrak{X}_U^\triangleright$ compatibili con la restrizione. Sempre per incollamento si ottiene il morfismo di siti $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_G^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}$, che con \mathfrak{X} rappresenta il funtore $\varphi_{\mathfrak{X}}$. \square

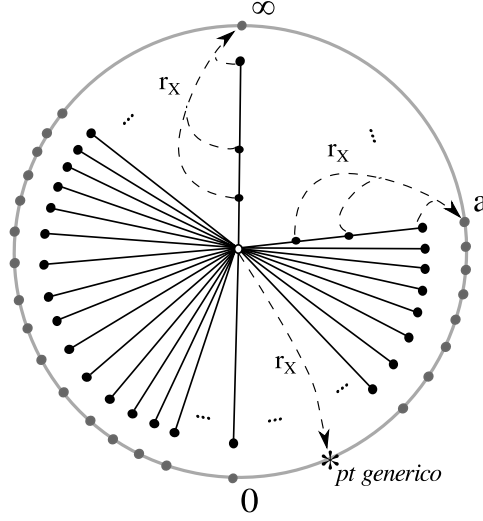


Figura 1.2: Il morfismo r_X per $X = \mathbb{P}_k^1$, con k algebricamente chiuso. Si può osservare che in questo caso $X^\natural = X^{an}$.

Più precisamente, \natural è un funtore dalla categoria dei $k^o(=k)$ -schemi formali a quella dei k -spazi analitici, la cui azione a livello dei morfismi manda $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ in $f^\natural : \mathfrak{X}^\natural \rightarrow \mathfrak{Y}^\natural$ dove quest'ultimo è univocamente determinato dalla commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_G^\natural & \xrightarrow{f^\natural} & \mathfrak{Y}_G^\natural \\ r_{\mathfrak{X}} \downarrow & & \downarrow r_{\mathfrak{Y}} \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y}. \end{array}$$

Per quanto osservato nella costruzione di X^\natural e X^{an} , se U è un aperto affine allora $U^\natural \subset U^{an}$ dato che per il primo si cononderano esclusivamente le seminorme moltiplicative limitate, mentre nel caso del secondo si richiede solo che siano limitate su k e, per l'Osservazione 1.1.6, le seminorme sono limitate di costante 1. Per esempio se $X = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$, come si è già osservato, X^\natural è l'insieme delle seminorme moltiplicative maggiorate dalla costante 1, ovvero $E(0, 1)$ mentre X^{an} è l'insieme delle seminorme che estendono la norma banale su k .

Per costruzione di \mathfrak{X}^\natural , se \mathfrak{X} è il completato formale di X lungo un sottoschema chiuso Y , se X è affine e se $j : \mathfrak{X} \rightarrow X$ è il morfismo canonico

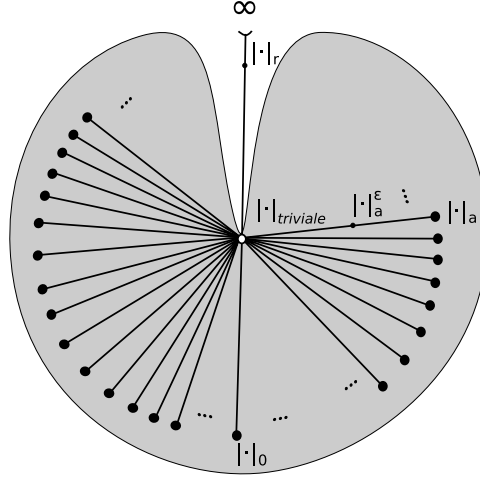


Figura 1.3: Il disco unitario $E(0,1) = \{|T_1| \leq 1, \dots, |T_n| \leq 1\}$ quando k è munito della valutazione banale ed è algebricamente chiuso.

indotto dall'inclusione di un anello nel suo completato, allora j^\triangleright è un isomorfismo tra $\mathfrak{X}^\triangleright$ e $r_X^{-1}(Y)$. Questo vale anche per uno schema localmente algebrico X , il che implica che, se $i_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_s \hookrightarrow \mathfrak{X}$ è l'immersione chiusa allora $i_{\mathfrak{X}}^\triangleright : \mathfrak{X}_s^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}^\triangleright$ è a sua volta un'immersione chiusa di k -spazi analitici. Vediamo di dimostrare quest'ultima asserzione: è sufficiente ridursi al caso affine, ovvero $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$ e $Y = V(\mathcal{I})$: in questo caso $Y = \mathfrak{X}_s \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow X$ corrisponde al morfismo tra anelli $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ e dunque $Y^\triangleright = \mathfrak{X}_s^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$ è un'immersione chiusa ma, come abbiamo appena detto, l'ultimo morfismo è un'immersione aperta e dunque $i_{\mathfrak{X}}$ è un'immersione chiusa.

Ricordiamo che il morfismo $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$, definito nella sezione precedente, associa a x il punto $\ker(| \cdot |_x)$. Se dunque X è un k -schema localmente algebrico, imponendo che la restrizione ad ogni aperto affine $U = \text{Spec}(\mathcal{A}_U)$ rispetti questa definizione, i morfismi $\rho_{\mathcal{A}_U}$ si ricolano ad un'unica applicazione $\rho_X : X^\triangleright \rightarrow X$.

Diamo qualche ulteriore caratterizzazione di ρ_X e r_X :

Proposizione 1.2.8. *Sia X un schema localmente algebrico :*

- i) *Se $x \in X^\triangleright$ allora $r_X(x) \in \overline{\{\rho_X(x)\}}$; se $\zeta, \xi \in X$ e $\zeta \in \overline{\{\xi\}}$ allora esiste $x \in X^\triangleright$ tale che $\rho_X(x) = (\xi)$ e $r_X(x) = \zeta$*
- ii) *Se $U \subset X$ è un aperto affine allora*

$$U^\triangleright = r_X^{-1}(U) \subset \rho_X^{-1}(U),$$

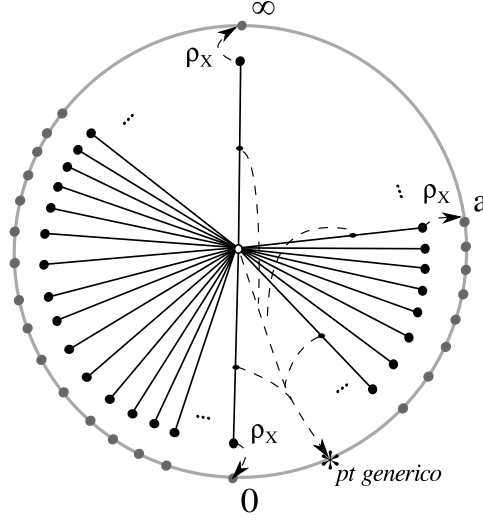


Figura 1.4: Il morfismo ρ_X con $X = \mathbb{P}_k^1$, k algebricamente chiuso.

ogni $x \in \rho_X^{-1}(U)$ è una seminorma moltiplicativa su $\mathcal{O}_X(U)$, limitata se e solo se $r_X(x) \in U$, che induce una norma su $\kappa(\rho_X(x))$ la quale estende la norma banale di k e $\mathcal{H}(x) = \widehat{\kappa(\rho_X(x))}$.

iii) Per ogni $\xi \in X$

$$\rho_X^{-1}(\xi) \cap r_X^{-1}(\xi) = \{*\} = \sigma(\xi)$$

e $\sigma(\xi)$ corrisponde alla norma banale su $\kappa(\xi)$; ogni punto $x \in X^\triangleright$ tale che $\mathcal{H}(x)$ sia munito della norma banale è della forma $\sigma(\xi)$ per un certo $\xi \in X$.

iv) Per ogni $\xi \in X$ il sottospazio (topologico) $r_X^{-1}(\xi)$ di X^\triangleright è localmente compatto e

$$\overline{r_X^{-1}(\xi)}^{X^\triangleright} = \bigcup_{\xi' \rightsquigarrow \xi} r_x^{-1}(\xi').$$

Dimostrazione. É sufficiente ricondursi al caso di $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$ schema affine:

- (i) La prima asserzione è semplicemente l'Osservazione 1.1.9. La reciproca si dimostra utilizzando su $\{\xi\}_{red}$ un risultato sugli schemi integri noeteriani.
- (ii) Nel caso affine la dimostrazione è triviale.

- (iii) Se un punto x di X^\triangleright verifica $\rho_X(x) = r_X(x)$ allora per ogni $f \in \mathcal{A}$ si ha che $|f(x)| = 0$ se e solo se $|f(x)| < 1$ dunque l'intersezione è un singoletto che corrisponde alla norma banale di $\kappa(x)$ tramite $\mathcal{A} \rightarrow \kappa(x)$.
- (iv) Dato che $\mathcal{O}_{X,\xi}$ è l'insieme dei punti ξ' generalizzazioni di ξ si ha che, per costruzione di X^\triangleright e di r_X , $i : \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ induce una bigezione continua

$$\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \simeq \bigcup_{\xi' \rightsquigarrow \xi} r_x^{-1}(\xi')$$

che è un omeomorfismo dato che $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi})$ è compatto e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è di Hausdorff. Quindi $i(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}))$ è un chiuso di X^\triangleright . È dunque sufficiente dimostrare che ogni dominio analitico compatto contenente $r^{-1}(\xi)$ contiene anche $i(\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}))$ il che si mostra riconducendosi al caso stretto per estensione non archimedea K/k e riproiettando in seguito.

□

Per la proprietà universale di X^{an} l'applicazione $\rho_X : X^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}$ induce $i_X : \mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}^{an}$ e, come abbiamo già osservato, la restrizione di quest'ultimo è un'inclusione su U^\triangleright quando U aperto affine. Inoltre l'immagine di U^\triangleright tramite i_X è un dominio affinoide di X^{an} : nel caso di $X = \mathbb{A}_k^n$ si tratta di $E(0, 1) = \{|T_1| \leq 1, \dots, |T_n| \leq 1\}$, in generale U^\triangleright è isomorfo tramite i_X a $E(0, 1) \cap U^{an}$ e se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo di k -schemi localmente algebrici il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{i_X} & X^{an} \\ f^\triangleright \downarrow & & \downarrow f^{an} \\ Y^\triangleright & \xrightarrow{i_Y} & Y^{an} \end{array} \quad (*)$$

è commutativo.

Osservazione 1.2.9. *Per i criteri valutativi di separazione e proprietà i_X realizza un isomorfismo tra X^\triangleright e un dominio analitico di X^{an} se X è separato, e con tutto X^{an} se X è proprio.*

Definizione 1.2.10. *Sia \mathfrak{X} un k -schema formale localmente algebrico, la sua fibra generica \mathfrak{X}_η è lo spazio k -analitico indotto da $\mathfrak{X}^\triangleright$ sull'aperto $\mathfrak{X}^\triangleright - \mathfrak{X}_s^\triangleright$.*

Si osservi che se $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ è un morfismo adico (ovvero tale che se \mathcal{I} è un ideale di definizione per \mathfrak{Y} allora $\mathcal{J} = f^{-1}(\mathcal{I})$ lo è per \mathfrak{X}) allora $f^\triangleright(\mathfrak{X}_\eta) \subset \mathfrak{Y}_\eta$ e dunque, se indichiamo con f_η la restrizione di f^\triangleright alla fibra

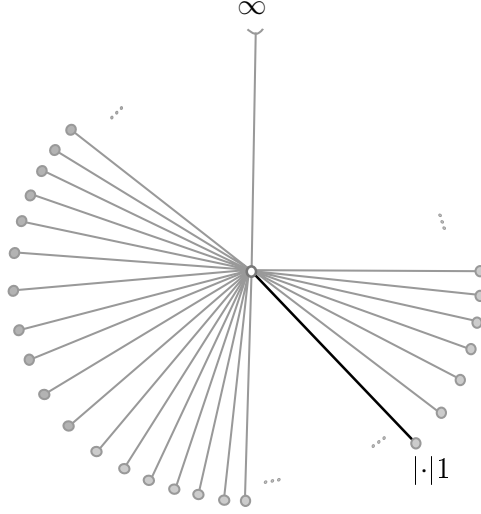


Figura 1.5: Se \mathfrak{X} è il completato di \mathbb{A}_k^1 lungo $(X - 1)$ allora \mathfrak{X}_s è il segmento aperto $]|\cdot|_{triv}, |\cdot|_1[$.

generica, si ottiene un funtore η di *fibra generica* dalla categoria dei k -schemi localmente algebrici in cui consideriamo solo i morfismi adici a quella degli spazi k -analitici.

Osservazione 1.2.11. *Se \mathfrak{X} è un schema localmente algebrico allora la sua fibra generica è vuota, infatti $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_s$.*

Proposizione 1.2.12. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di k -schemi e Z un sottoschema chiuso di Y , \mathfrak{Y} il completato di Y lungo Z , \mathfrak{X} quello di X lungo $f^{-1}(Z)$ e $\hat{f} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ il morfismo indotto. Se f è proprio e realizza un isomorfismo tra $X - f^{-1}(Z)$ e $Y - Z$ allora*

$$\hat{f}|_{\mathfrak{X}_\eta} = \hat{f}_\eta : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{Y}_\eta$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Dato che $\mathfrak{X}^\triangleright = r_X^{-1}(f^{-1}(Z))$, $\mathfrak{Y}^\triangleright = r_Y^{-1}(Z)$, $\mathfrak{X}_s^\triangleright = f^{-1}(Z)^\triangleright$ e $\mathfrak{Y}_s^\triangleright = Z^\triangleright$ la tesi è in effetti equivalente a dimostrare che

$$f|_{\mathfrak{X}_\eta}^\triangleright : r_X^{-1}(f^{-1}(Z)) - f^{-1}(Z)^\triangleright \rightarrow r_Y^{-1}(Z) - Z^\triangleright$$

sia un isomorfismo. Possiamo dunque ricondurci al caso di $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$ affine e $Z = V(a)$, $a \in \mathcal{A}$. Poiché Y è affine allora è separato, e dato che f è un morfismo proprio, e dunque separato, anche X è separato.

Quindi nel diagramma $(*)$ i due morfismi i_X, i_Y realizzano degli isomorfismi con le loro immagini per l'Osservazione 1.2.9; f induce un isomorfismo tra $X - f^{-1}(Z)$ e $Y - Z$ quindi per funtorialità f^{an} ne induce uno tra $X^{an} - (f^{an})^{-1}(Y^{an})$ e $Y^{an} - Z^{an}$ e, infine, $f^{an}|_{\mathfrak{X}_\eta} = f^\natural|_{\mathfrak{X}_\eta}$ induce un isomorfismo tra $\mathfrak{X}^\natural - (f^{-1}(Z)^{an} \cap \mathfrak{X}^\natural) = \mathfrak{X}^\natural - (f^{-1}(Z))^\natural$ e la sua immagine. Basta dunque dimostrare la bigettività dell'applicazione sottostante \hat{f}_η , cosa che si fa utilizzando il fatto che f è proprio e le proprietà dei punti di \mathfrak{X}_η . \square

Capitolo 2

Spazio di Berkovich di una varietà torica

Sia k un campo munito della norma banale e T un k -toro *totalmente decomponibile* ovvero un k -schema in gruppo isomorfo a \mathbb{G}_m^n per un certo $n \in \mathbb{N}$. Faremo le costruzioni che ci serviranno per la dimostrazione del teorema prima nel caso di una varietà torica, per estenderla in seguito al caso di un'immersione toroidale. Nel caso di divisori a intersezione trasversa potremo dunque ricondurci a quest'ultimo caso supponendo che il campo k sia perfetto.

2.1 Le applicazioni p e p

Dato $T \simeq \operatorname{Spec}(k[M])$ un k -toro totalmente decomponibile, una k -varietà torica è un k -schema algebrico integrale X che sia localmente del tipo $\operatorname{Spec}(k[G])$, dove G è un semigruppato di tipo finito che genera M , sul quale T agisce e che possieda un'orbita aperta densa T -isomorfa a T .

Esempio 2.1.1. *Un esempio particolarmente semplice si ottiene prendendo $T = \mathbb{G}_m^1 = \operatorname{Spec}(k[T, T^{-1}])$, $X = \mathbb{A}_k^1 = \operatorname{Spec}(k[S])$ con l'orbita aperta $\mathbb{G}_m^1 \subset \mathbb{A}_k^1$ e l'azione indotta da*

$$k[S] \rightarrow k[T, T^{-1}] \otimes_k k[S]$$

$$S \mapsto T \otimes S$$

Se x è un punto di X indichiamo con $O(x)$ l'orbita che lo contiene, nell'esempio precedente se A è un'algebra qualunque l'azione di T su X è

data da:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(k[T, T^{-1}], A) \times \mathrm{Hom}(k[S], A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k[S], A) \\ A^* \times A & \longrightarrow & A \\ (a, b) & \longrightarrow & ab \end{array},$$

quindi ogni elemento invertibile ha come orbita $A^* \subset A$ il che vuole più semplicemente dire che l'orbita di ogni punto di $\mathbb{G}_m^1 \subset \mathbb{A}^1$ è tutto \mathbb{G}_m^1 , l'orbita aperta e densa \mathbb{G}_m^1 -isomorfa a \mathbb{G}_m^1 . Più in generale tutte le orbite sono dei sottoschemi integrali localmente chiusi e indichiamo con $\Xi(X)$ l'insieme dei loro punti generici.

Osservazione 2.1.2. *La categoria dei spazi analitici ammette prodotti fibrati: se $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ e $Z = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, e i morfismi di domini affinoidi $X \rightarrow Z$ e $Y \rightarrow Z$ sono indotti da due morfismi limitati d'algebre affinoidi $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, allora il prodotto fibrato su Z è dato da $X \times_Z Y = \mathcal{M}(\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{C}} \mathcal{B})$. Il caso generale si ottiene, al solito, tramite incollamento.*

Osservazione 2.1.3. *L'azione di T su X ne induce una di T^\triangleright su X^\triangleright , nell'esempio di prima, ovvero k algebricamente chiuso, $X = \mathbb{A}^1$ e $T = \mathbb{G}_m^1$, allora $X^\triangleright = E(0, 1) = \{x \in \mathcal{M}(k[T]) \mid |T(x)| \leq 1\}$ e $T^\triangleright = D(0; 1, 1) = \{x \in \mathcal{M}(k[T]) \mid |T(x)| = 1\}$ è la corona di raggio 1 e di spessore nullo.*

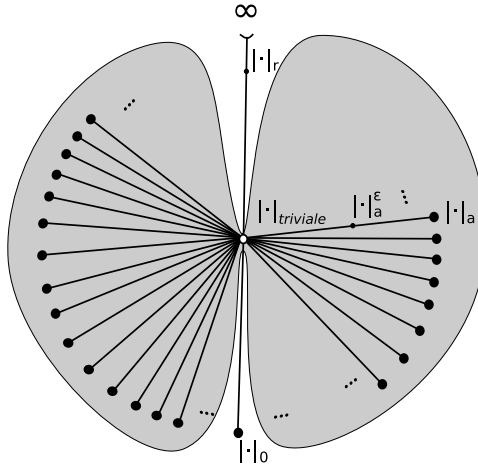


Figura 2.1: La corona $D(0; 1, 1) = \{x \in \mathcal{M}(k[T]) \mid |T(x)| = 1\}$ su k munito della valutazione banale e algebricamente chiuso.

Per quanto riguarda l'azione di $D(0; 1, 1)$ su $E(0, 1)$, è indotta da

$$\begin{array}{ccc} k\{S\} & \rightarrow & k\{T, T^{-1}\} \hat{\otimes}_k k\{S\} \\ S & \mapsto & T \otimes S, \end{array}$$

in particolare l'azione di un k -punto $|\cdot|_a$ manda $|\cdot|_b^\varepsilon$ su $|\cdot|_{ab}^\varepsilon$.

Se \mathcal{A} è una k -algebra affinoide, allora l'azione è data da:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(k\{T, T^{-1}\}, \mathcal{A}) \times \mathrm{Hom}(k\{S\}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(k\{S\}, \mathcal{A}) \\ \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (a, b) & \longrightarrow & ab \end{array}.$$

Si noti che, se k è munito della valutazione banale, $k\{\underline{T}\} = k[\underline{T}]$; manterremo comunque perlopiù la prima notazione per sottolineare la categoria nella quale stiamo lavorando.

Sia $T = \mathbb{G}_m^n$ con $n \in \mathbb{N}$ qualunque e X una T -varietà torica, su X^\triangleright definiamo l'endomorfismo \mathbf{p} nel modo seguente: se x è un punto di X allora $T^\triangleright \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) = T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ ammette uno e un solo punto di Shilov y (ovvero il punto che corrisponde alla norma del max su $\mathcal{H}(x)\{T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}\}$), dato che $T \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ è integrale (e dunque in particolare irriducibile). Definiamo allora $\mathbf{p}(x)$ come

$$(T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow T^\triangleright \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright)(y),$$

dove la prima freccia è il prodotto fibrato dell'identità su T^\triangleright e del morfismo $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X^\triangleright$ localizzato in x e la seconda è l'azione di T^\triangleright su X^\triangleright .

Esempio 2.1.4. Nel caso dell'Esempio 2.1.1 $\mathbf{p}(x)$ è indotta da

$$\begin{array}{ccccc} k\{S\} & \rightarrow & k\{T, T^{-1}, S\} & \rightarrow & \mathcal{H}(x)\{T, T^{-1}\} \\ S & \mapsto & T & \mapsto & S(x)T. \end{array}$$

Se x è un un k -punto della forma $|\cdot|_a$ con $a \neq 0$, allora $\mathcal{H}(x) = k$, il bordo di Shilov di T^\triangleright è la norma banale e

$$\mathbf{p}(x) = |\cdot|_{triviale}.$$

Se x è della forma $|\cdot|_a^\varepsilon$ allora x manda $\sum_i a_i T^i$ su $\max_i |a_i| \varepsilon^i = \max_{i, a_i \neq 0} \varepsilon^i$ e $\mathcal{H}(x) \simeq k(S)$, munito della norma $P(S)/Q(S) \mapsto |P(S)|_a^\varepsilon / |Q(S)|_a^\varepsilon$. Quindi $\mathbf{p}(x)$ è la norma $\sum_i a_i S^i \mapsto \max_i |a_i| |S^i|_a^\varepsilon$, se $a = 0$ si ha che $\mathbf{p}(x) = x$, altrimenti, dato che $S - a \nmid S^i$, $\mathbf{p}(x) = |\cdot|_{triviale}$. Infine, se $x = |\cdot|_{triviale}$ si verifica immediatamente che $\mathbf{p}(x) = x$.

Si ha più in generale il seguente risultato: sia $x \in X^\triangleright$, y il punto di Shilov di $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ e z quello di $T^\triangleright \times T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$. Allora se $T^\triangleright \times T^\triangleright \times \mathcal{M}(K) \rightarrow T^\triangleright \times \mathcal{M}(K)$ è il morfismo indotto da $K\{\underline{T}, \underline{T}^{-1}\} \rightarrow K\{\underline{T}, \underline{T}^{-1}, \underline{S}, \underline{S}^{-1}\}$, $\underline{T} \mapsto \underline{TS}$, il punto di Shilov del primo è mandato su quello del secondo. Consideriamo dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) & \xrightarrow{\alpha} & T^\triangleright \times T^\triangleright \times X^\triangleright & \xrightarrow{m \times 1} & T^\triangleright \times X^\triangleright \\
& \searrow \pi_{23} & \downarrow 1 \times m & & \downarrow m \\
T^\triangleright \times X^\triangleright & & T^\triangleright \times X^\triangleright & \xrightarrow{m} & X^\triangleright \\
& \searrow \pi_2 & \downarrow m & & \\
& & X^\triangleright & &
\end{array}$$

dove α è il morfismo localizzato in z . Per quanto abbiamo appena detto e seguendo il diagramma $m \circ (m \times 1) \circ \alpha$ e $m \circ \pi_{23} \circ \alpha$ sono localizzate in $\mathbf{p}(x)$, e dato che $1 \times m$ manda z sul punto di Shilov di $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(\mathbf{p}(x)))$ allora dalla commutatività del diagramma si ottiene che $\mathbf{p}^2(x) = \mathbf{p}(x)$ per ogni $x \in X^\triangleright$, e quindi

$$\mathbf{p}(X^\triangleright) = \mathfrak{S}(X) \doteq \{x \in X^\triangleright \mid \mathbf{p}(x) = x\}.$$

Inoltre se $x \in X^\triangleright$ è fissato da $T^\triangleright(k) = T(k)$ allora $x \in \mathfrak{S}(X)$ e la reciproca è vera non appena k è infinito (omettiamo qui la dimostrazione di quest'ultimo risultato).

In modo del tutto analogo possiamo costruire su X un endomorfismo p nella seguente maniera: per ogni $x \in X$, $p(x)$ è definito come l'immagine del punto generico di $T \otimes_k \kappa(x)$ tramite il morfismo $T \otimes_k \kappa(x) \rightarrow T \times X \rightarrow X$. Al fine di verificare la continuità di p occorre dargli una caratterizzazione più precisa.

Esempio 2.1.5. *Supponiamo k algebricamente chiuso, $X = \mathbb{P}_k^1$ (e $T = \mathbb{G}_m$). Allora per ogni $x \in X$, $x \notin \{0, \infty\}$ l'applicazione p manda x nel punto generico di X , mentre $p(0) = 0$ e $p(\infty) = \infty$.*

In generale, per ogni varietà torica X e ogni $x \in X$, $p(x)$ è il punto generico dell'orbita di x dato che questa coincide con l'immagine del morfismo $T \otimes_k \kappa(x) \rightarrow T \times X \rightarrow X$. Allora se $F \subset X$ è un chiuso, $p^{-1}(F)$ è l'unione delle orbite $O(\xi)$ con $\xi \in \Xi \cap F$ che è un insieme finito. Dal momento che F è chiuso, inoltre, contiene la chiusura di ogni $\xi \in \Xi \cap F$ e quindi la sua immagine inversa contiene la chiusura delle orbite ed è quindi chiusa, il che dimostra la continuità di p . Inoltre risulta dalla caratterizzazione di p che $p^2 = p$.

Osservazione 2.1.6. Dato che il punto di Shilov di $T^\triangleright \otimes_k K$ è il solo elemento dell'immagine inversa tramite r del punto generico di $T \otimes_k K$ si ha la commutatività dei due diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathfrak{X} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathfrak{X} \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{p} & X, \end{array}$$

il che, assieme alla caratterizzazione dell'immagine di \mathbf{p} , implica che

$$\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(O(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\xi) \quad \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(O(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\xi).$$

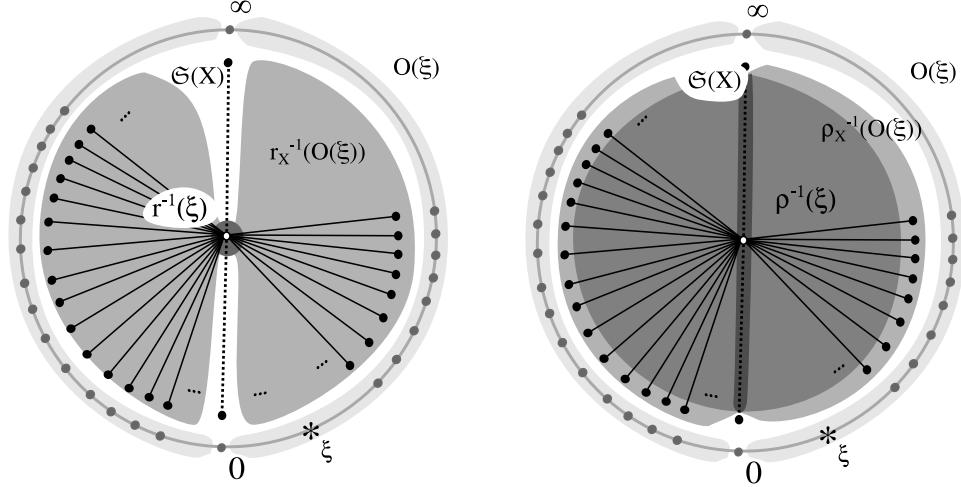


Figura 2.2: L'intersezione dell'immagine inversa dell'orbita di un punto generico tramite r e ρ e di $\mathfrak{S}(X)$ nel caso in cui $X = \mathbb{P}_k^1$, con k algebricamente chiuso.

Consideriamo il caso in cui $X = \text{Spec } k[G]$ con G un semigruppato di tipo finito generato da $g_i, g_j^{-1}, i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$ per un certo $m \leq n$. Dato che $k[G] \rightarrow k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, $g_i \mapsto X_i, g_j^{-1} \mapsto X_j^{-1}$ è iniettivo, allora $T \rightarrow X$ è un'immersione densa, che ha come immagine X_0 , l'orbita T -isomorfa a T . In generale se X è una T -varietà torica, X_0 è densa in X , e quindi se U è un aperto affine T -invariante esiste $x \in U \cap X_0$ e dato che ogni aperto T -invariante contiene ogni orbita che interseca, allora $X_0 \subset U$ e X_0 s'identifica con l'orbita T -isomorfa a T di U , vista come T -varietà torica.

Osservazione 2.1.7. Sia $j : T \rightarrow X_0 \subset X$ un'immersione aperta equivariante fissata e $U = \text{Spec } k[G]$ un aperto affine T -invariante. L'azione di T su U è indotta da $k[G] \rightarrow k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] \otimes_k k[G]$, $g_i \mapsto g_i \otimes X_i$. Fissata g_1, \dots, g_n base di G , indichiamo con X_g l'immagine di g via l'applicazione $k[G] \rightarrow k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, $g_i \mapsto X_i$ allora, passando agli spazi di Berkovich associati si ottiene che

$$\mathbf{p}(x) = \left(\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \max_g |a_g X_g(x)| = \max_{g, a_g \neq 0} |X_g(x)| \right),$$

infatti $|a_g|$ può assumere solo il valore 0 o 1.

Dunque $Y_x \doteq \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(x)) = \{y \in U^\square \mid |P(\mathbf{p}(x))| = |P(\mathbf{p}(y))| \forall P \in k[G]\} = \{y \in U^\square \mid |X_g(x)| = |X_g(y)| \forall g \in G\}$. Se consideriamo allora $x \in \rho^{-1}(X_0) \cap U^\square$ si ha che $|X_g(x)| \neq 0$ per ogni $g \in G$ e dato che G è finito

$$Y_x = \{y \in U^\square \mid |X_g(y)| = |X_g(x)| \neq 0 \forall g \in G\}$$

è un dominio affinoide. Sia $P \in k[G]$, $P = \sum_g a_g g$, per ogni $y \in Y$, dato che y è non archimedeo,

$$|P(y)| \leq \max_{g, a_g \neq 0} |X_g(y)| = \max_{g, a_g \neq 0} |X_g(x)| = |P(x)|$$

e quindi $\mathbf{p}(x)$ è il solo punto di Shilov di Y_x .

2.2 Il ventaglio conico nello spazio di Berkovich di una varietà torica

Sia, come nella sezione precedente, X una T -varietà torica con $T = \mathbb{G}_m^n$, U un aperto affine T -invariante di X , $\mathcal{O}_X(U) = k[G]$ con G semigruppato generato da g_1, \dots, g_n e X_g l'immagine di g via $k[G] \rightarrow k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$, $g_i \mapsto X_i$.

Definizione 2.2.1. Sia $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G,]0, 1])$ l'insieme dei morfismi di monoidi con unità munito della topologia generata dai morfismi di valutazione $u \mapsto u(g)$. La sua compattificazione canonica C è l'immersione aperta

$$\text{Hom}_{\text{Mon}}(G,]0, 1]) \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1]).$$

Proposizione 2.2.2. L'applicazione \mathbf{p} è continua e realizza dunque una re-trazione di X^\square nel sottospazio chiuso $\mathfrak{S}(X)$. Inoltre per ogni $u \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1])$, l'applicazione

$$J(u) : k[G] \rightarrow \mathbb{R}^+, \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \max_{g \in G} |a_g| u(g)$$

è un elemento di $\mathcal{M}(k[G]) = U^\triangleright$ e J realizza un omeomorfismo tra $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1])$ e $\mathfrak{S}(U) = \mathfrak{S}(X) \cap U^\triangleright$, sottospazio chiuso di U^\triangleright .

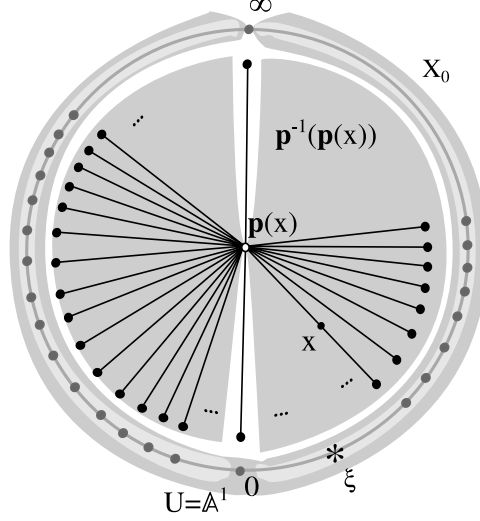


Figura 2.3: Sia $X = \mathbb{P}_k^1$ e $U = \mathbb{A}_k^1$; se $x = |\cdot|_{\text{triviale}}$ oppure $x = |\cdot|_a^\varepsilon$ con $a \neq 0$ allora $Y_x = \mathbb{G}_m^{1,an}$, altrimenti $x = |\cdot|_0^\varepsilon$ con $\varepsilon < 1$ e in questo caso $Y_x = \{\mathbf{p}(x)\} = \{x\}$.

Dimostrazione. Se U è un aperto affine di X la topologia su U^\triangleright è generata dai morfismi di valutazione $|f| : x \mapsto |f(x)|$, $f \in \Gamma(\mathcal{O}_X, U)$, dunque un morfismo su U^\triangleright è continuo se e solo se la sua composizione con i $|f|$ è continua per ogni $f \in \Gamma(\mathcal{O}_X, U)$. Ora, se U è un aperto affine T -invariante e $f \in \Gamma(\mathcal{O}_X, U) = k[G]$, $f = \sum_{g \in G} a_g g$, per l'Osservazione 2.1.7 $|f| \circ \mathbf{p}(x) = \max_g |a_g X_g(x)|$, e dato che un max di funzioni continue è continuo, tale morfismo lo è su U^\triangleright e dunque, dato che gli aperti affinoidi T -invarianti ricoprono X , su tutto X^\triangleright . È certamente una retrazione dato che $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$, per quanto riguarda $\mathfrak{S}(X)$, è l'immagine inversa tramite il morfismo continuo $\text{Id} \times \mathbf{p} : |X^\triangleright| \rightarrow |X^\triangleright| \times |X^\triangleright|$ della diagonale, che è chiusa dato che lo spazio topologico sottostante X^\triangleright è separato. La continuità di J si verifica in maniera analoga e l'Osservazione 2.1.7 garantisce la bigettività (e quindi, grazie alla compattezza di $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1])$ il fatto che sia un omeomorfismo). \square

Esempio 2.2.3. Nel caso dell'immagine 2.3, con $X = \mathbb{P}_k^1$ e $U = \mathbb{A}_k^1$, $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1]) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{N}, [0, 1]) = [0, 1]$ e J non è altro che l'omeomorfismo $\varepsilon \mapsto |\cdot|_0^\varepsilon$.

Definizione 2.2.4. Un cono razionale σ su uno spazio vettoriale reale V è un'intersezione finita di semispazi razionali, ovvero di immagini inverse di $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tramite un'applicazione lineare da V verso \mathbb{R} . Una faccia d'un cono σ è un'intersezione di σ con il nucleo di un'applicazione lineare positiva su σ .

Una struttura di cono razionale su di un spazio topologico C (passando alla notazione moltiplicativa) è il dato di un gruppo abeliano libero di tipo finito L e di un omomorfismo iniettivo $\lambda : L \rightarrow C^0(C, \mathbb{R}_{>0})$ tale che

$$\lambda^\vee : C \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}}(L, \mathbb{R}_{>0}), x \mapsto (l \mapsto \lambda(l)(x))$$

realizza un omeomorfismo con un cono razionale dello spazio vettoriale reale $\text{Hom}_{\text{Ab}}(L, \mathbb{R}_{>0})$. Un tale cono è detto strettamente convesso se ${}^\vee(C)$ non contiene nessuna retta.

Osservazione 2.2.5. Sia $V = \text{Hom}_{\text{Ab}}(L, \mathbb{R}_{>0})$, allora se L è generato da l_1, \dots, l_n su \mathbb{Z} e $u \in V$, u è univocamente determinata dagli $a_i = u(l_i)$ e $u(l + l') = u(l)u(l')$. Quindi ogni applicazione lineare da V verso $\mathbb{R}_{>0}$ è della forma:

$$\beta : \text{Hom}_{\text{Ab}}(L, \mathbb{R}_{>0}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_i \mapsto b_i$$

e $\beta(aa') = \beta(a) + \beta(a')$. Quindi $\beta(1) = 0$ e se chiediamo che $\beta(a) \geq 0$ se e solo se $a \leq 1$ (basta prendere $-\beta$ al posto di β) possiamo in maniera equivalente definire i coni razionali su V come i sottospazi della forma $\{u | u(l_1) \leq 1, \dots, u(l_n) \leq 1\}$. Si può inoltre dimostrare che se un cono di V è strettamente convesso allora esiste un semigruppato di tipo finito G che genera L e tale che λ^\vee induce un omeomorfismo su $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G,]0, 1])$ (munito della topologia generata dalle valutazioni). In questo caso ogni faccia si scrive in maniera unica come

$$\{u \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(G,]0, 1]) | u|_P = 1\}$$

dove P è una parte saturata di G .

Se $\mathfrak{S}_0(X) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0)$ e $\mathfrak{S}_0(U) = \mathfrak{S}(U) \cap \rho^{-1}(X_0) = \mathfrak{S}_0(X) \cap U^\triangleright$ allora $J : \text{Hom}_{\text{Mon}}(G, [0, 1]) \rightarrow \mathfrak{S}(U)$ induce un omeomorfismo da $\text{Hom}_{\text{Mon}}(G,]0, 1])$ su $\mathfrak{S}_0(U)$, infatti $U^\triangleright = \mathcal{M}(k[G])$ e la sua intersezione con $\rho^{-1}(X_0)$ è l'aperto dato dalla condizione $X_g \neq 0$ per ogni $g \in G$. Questo induce su $\mathfrak{S}_0(U)$ una struttura di cono razionale strettamente convesso.

Osservazione 2.2.6. Se $j : T \rightarrow X_0 \subset X$ è l'immersione aperta fissata indotta da

$$j^\# : k[G] \hookrightarrow k[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] = k[M],$$

allora $j^\#$ induce un isomorfismo tra $\mathcal{O}_X^*(X_0)$ e $k[M]^*$ e dunque tra $\mathcal{O}_X^*(X_0)/k^*$ e M . La struttura di cono razionale su $\mathfrak{S}_0(U)$ è in modo del tutto equivalente indotta da

$$M = \mathcal{O}_X^*(X_0)/k^* \rightarrow C^0(\mathfrak{S}_0(U), \mathbb{R}_{>0}), \quad f \mapsto |f|,$$

ed è dunque indipendente dalla scelta di j .

Proposizione 2.2.7. *Per ogni $W \subset U$ aperto affine invariante $\mathfrak{S}_0(W) = \mathfrak{S}_0(U) \cap W^\triangleright$ ed è una faccia di $\mathfrak{S}_0(U)$. Inoltre:*

i) *la mappa*

$$W \mapsto \mathfrak{S}_0(W)$$

realizza una bigezione tra gli aperti affini invarianti di U e le facce di $\mathfrak{S}_0(U)$;

ii) *la mappa*

$$\xi \mapsto \mathfrak{S}_0(W) \cap r^{-1}(\xi)$$

realizza una bigezione tra $\Xi(W) = \Xi(X) \cap W$ e l'interno delle facce di $\mathfrak{S}_0(U)$;

iii) *l'interno di $\mathfrak{S}_0(U)$ corrisponde all'unica orbita chiusa di U .*

La dimostrazione di questa proposizione si basa sulla caratterizzazione delle facce di un cono per l'Osservazione 2.2.5 e l'anticontinuità di r , e garantisce che quando U percorre l'insieme degli aperti affini T -invarianti, che sono un ricoprimento di X , $\mathfrak{S}_0(U) \cup \mathfrak{S}_0(V) = \mathfrak{S}_0(U \cup V)$ sia una faccia comune dei due coni. Abbiamo dunque costruito un ventaglio di coni strettamente convessi che chiamiamo *il ventaglio di X nel suo spazio di Berkovich associato*.

Esempio 2.2.8. *Vediamo cosa succede nell'esempio di $X = \mathbb{P}_k^{1,an}$:*

- *gli aperti affini \mathbb{G}_m^1 -invarianti di X sono U_0 e U_1 e l'orbita \mathbb{G}_m^1 -isomorfa a \mathbb{G}_m^1 che indichiamo con X_0 ;*
- *$\Xi(X) = \{\xi, 0, \infty\}$, $\Xi(U_0) = \{\xi, 0\}$, $\Xi(U_1) = \{\xi, \infty\}$ e infine $\Xi(X_0) = \{\xi\}$;*
- *$W_\xi = \mathfrak{S}_0(U_i) \cap r^{-1}(\xi) = \{|\cdot|_{triviale}\}$
 $W_0 = \mathfrak{S}_0(U_0) \cap r^{-1}(0) =]|\cdot|_0, |\cdot|_{triviale}[$
 $W_1 = \mathfrak{S}_0(U_1) \cap r^{-1}(\infty) =]|\cdot|_{triviale}, |\cdot|_\infty[$.*

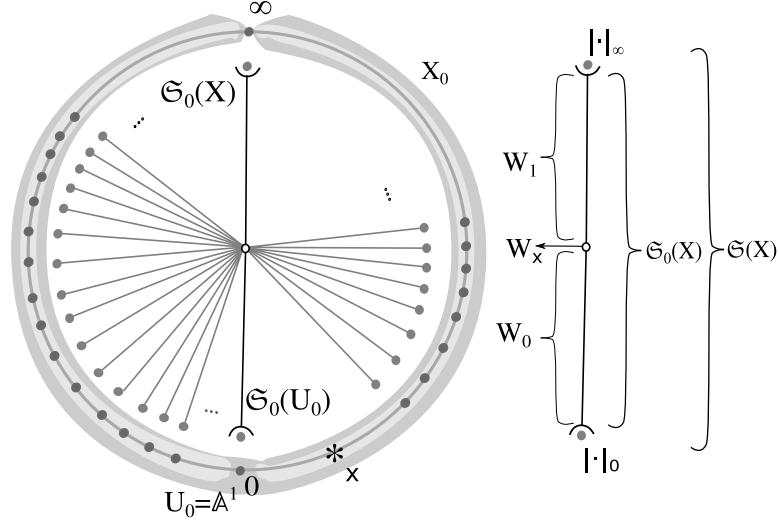


Figura 2.4: Il ventaglio di \mathbb{P}_k^1 nel suo spazio di Berkovich associato.

Nell'esempio di $X = \mathbb{P}_k^1$ è evidente che $\mathfrak{S}(X)$ è la chiusura di $\mathfrak{S}_0(X)$ in $\mathbb{P}_k^{1,an}$, questo in realtà vale per ogni X : $\mathfrak{S}_0(X)$ è l'immagine dell'aperto denso $\rho^{-1}(X_0)$ tramite \mathbf{p} che è continua dunque $\mathfrak{S}(X) = \mathbf{p}(X^\triangleright) \subset \overline{\mathfrak{S}_0(X)}$ e l'altra inclusione è evidente. Tutto questo resta valido per ogni aperto affine invariante U (dato che $\mathfrak{S}(U)$ è chiuso ed è la chiusura di $\mathfrak{S}_0(U)$ in U^\triangleright dunque anche in X^\triangleright), inoltre il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{Mon}(G,]0, 1]) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}_{Mon}(G,]0, 1]) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_0(U) \end{array}$$

garantisce che l'immersione di $\mathfrak{S}_0(U)$ in $\mathfrak{S}(U)$ è la sua compattificazione canonica, dunque anche $\mathfrak{S}(X)$ è la compattificazione canonica del ventaglio di X .

2.3 L'omotopia tra \mathbf{p} e id_{X^\triangleright}

Obiettivo di questo paragrafo è la costruzione di un'omotopia tra \mathbf{p} e id_{X^\triangleright} , la cui esistenza implica non solo che X^\triangleright si ritrae su $\mathfrak{S}(X)$ ma che ne è un retratto di deformazione e dunque un'equivalenza omotopica.

Definizione 2.3.1. Sia $t \in [0, 1]$, K estensione non archimedea di k , definiamo allora

$$G_K(t) = \{x \in T^\triangleright \hat{\otimes}_k K \mid |X_g - 1| \leq t, \forall g \in G\}.$$

L'insieme $G_K(t)$ è un sottogruppo K -analitico di $T^\triangleright \hat{\otimes}_k K$: per vederlo basta dimostrare che $G_K(t)(\mathcal{A})$ è un sottogruppo di $T^\triangleright \hat{\otimes}_k K(\mathcal{A})$ per ogni k -algebra affinoide \mathcal{A} ; ora, gli \mathcal{A} -punti di $T^\triangleright \hat{\otimes}_k K$ sono i morfismi limitati di $K[M]$ verso \mathcal{A} , ovvero i morfismi limitati di M verso \mathcal{A}^* . Se $x, y \in G_K(t)(\mathcal{A})$ allora $|x(m) - 1| \leq t$, $|y(m) - 1| \leq t$, inoltre, dato che x, y sono limitati, $|x(m)| = 1$ e $|y(m)| = 1$. Allora

$$\begin{aligned} |x(m)y^{-1}(m) - 1| &= ||x(m)y^{-1}(m) - y^{-1}(m) - 1 + y^{-1}(m)|| = \\ &= |y^{-1}||x(m) - 1 - y(m) + 1| \leq \\ &\leq \max\{|y(m) - 1|, |x(m) - 1|\} \leq t. \end{aligned}$$

Inoltre $G_K(t)$ possiede un unico punto di Shilov $g_K(t)$ dal momento che è isomorfo al dominio K -affinoide $\{|X_i| \leq t \mid \forall i = 1, \dots, n\}$ di $\mathcal{A}_K^{n, an}$. Questo isomorfismo è indotto dal morfismo di algebre di Banach

$$\varphi : K\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow K\{X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}\}, \quad X_i \mapsto X_i - 1.$$

Se K'/K è una torre di estensioni non archimedee allora la proiezione canonica manda $g_{K'}(t)$ su $g_K(t)$ e l'applicazione $g_K : t \mapsto g_K(t)$ è continua: basta verificarlo per $\varphi \circ g_K$; per ogni $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$, $f = \sum a_\nu X^\nu$ si ha che

$$|f(\varphi \circ g_K(t))| = \max_\nu |a_\nu(f)| t^{|\nu|}.$$

Definiamo dunque l'omotopia H come

$$H(x, t) = (T^\triangleright \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow T^\triangleright \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright)(g_K(t)),$$

e mostriamo che possiede le proprietà richieste. Per prima cosa osserviamo che se U è un aperto affine T -invariante allora U^\triangleright è invariante per $H(t, \cdot)$ per ogni $t \in [0, 1]$, perché U^\triangleright è T^\triangleright -invariante. Questo, insieme al fatto che gli aperti affini invarianti ricoprono X ci permette di ricondurci al caso affine per le nostre verifiche. Se $t = 0$ allora $G_{\mathcal{H}(x)}(t) = \{g_{\mathcal{H}(x)}(t)\}$ consiste nel k -punto $(1, \dots, 1)$ il quale agisce come l'identità su X^\triangleright e dunque $H(0, \cdot) = Id_{X^\triangleright}$. Se $t = 1$ allora $G_K(t) = T^\triangleright$ e dunque $H(1, \cdot) = \mathbf{p}$. Occorre verificare che per ogni $t \in [0, 1]$ si abbia $H(t, \cdot)|_{\mathfrak{S}(X)} = (i : \mathfrak{S}(X) \hookrightarrow X^\triangleright)$; sia U un aperto affine invariante, dato che lo spazio è localmente di Hausdorff e la topologia è generata dalle valutazioni $|f(\cdot)|$, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, per verificare se $x = H(x, t)$

è sufficiente mostrare che per ogni $f \in \mathcal{O}_X(U)$ si abbia $|f(x)| = |f(H(x, t))|$. Ora, $g_{\mathcal{H}(x)}(t)$ è il punto di Shilov di $G_{\mathcal{H}(x)}(t)$ e dunque

$$|f(H(x, t))| = \max_{G_{\mathcal{H}(x)}(t)} (\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k T^{\triangleright} \rightarrow T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright - |f(\cdot)|} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}),$$

inoltre, dato che $G_K(t) \subset G_K(s)$ se $t \leq s$, si ha che

$$|f(x)| = |f(H(0, x))| \leq |f(H(t, x))| \leq |f(H(1, x))| = |f(\mathbf{p}(x))|,$$

dunque se $x \in \mathfrak{S}(X)$ (il che equivale a $\mathbf{p}(x) = x$) abbiamo che $|f(H(t, x))| = |f(x)|$ per ogni $t \in [0, 1]$.

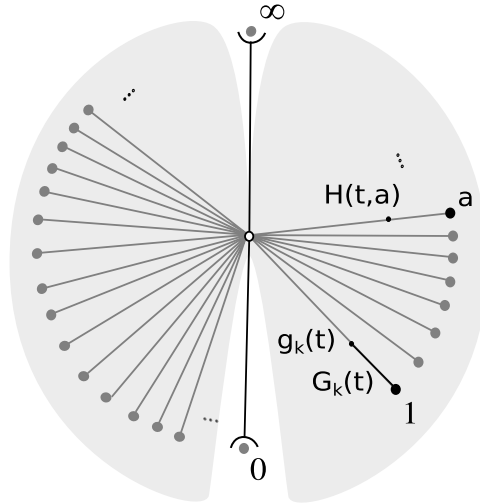


Figura 2.5: Per $X = \mathbb{P}_k^1$ e $a \notin \{0, \infty\}$ un k -punto, l'omotopia $H(a, t)$ fa scivolare il punto verso la norma banale.

Per ultimo, verifichiamo la continuità, mostrando che $|f(H(t, x))|$ è continua per ogni $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $f = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu}$. Concentriamoci per prima cosa sulla continuità in t : sia x fissato, $|f(\cdot)| \circ (t \mapsto H(x, t))$ è continua se $|f(\cdot)| \circ (g_{\mathcal{H}(x)} : t \mapsto g_{\mathcal{H}(x)}(t))$ lo è. Perché quest'ultimo morfismo sia continuo è sufficiente che lo sia $|f(\cdot)| \circ g_{\mathcal{H}(x)}$ composto con il morfismo indotto da $\mathcal{H}(x)\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \mathcal{H}(x)\{M\}$, $X_i \mapsto m_i - 1$: ma tramite questa composizione $|f(\cdot)| \circ g_{\mathcal{H}(x)}(t)$ non è altro che $\max_{\nu} |f(a_{\nu})| t^{|\nu|}$ ed è dunque continua.

Per quanto riguarda la continuità in x , sia $t \in]0, 1[$ fissato (i casi $t = 0$ e $t = 1$ sono già verificati) e consideriamo $F : \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U)[M] \rightarrow \mathcal{O}_X(U)[[X_1, \dots, X_n]]$ dove la prima freccia è l'azione di T ristretta a U e l'ultima è il morfismo $m_i \mapsto X_i + 1$. Sia f come sopra un elemento di $\mathcal{O}_X(U)$, allora

$$\begin{aligned} F(f) &= F(\sum_{\nu} a_{\nu} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}) = \sum_{\nu} a_{\nu} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} (1 + X_1)^{\nu_1} \dots (1 + X_n)^{\nu_n} \\ &= \sum_{\nu} F_{\nu}(f) X^{\nu}, \end{aligned}$$

e $H(\cdot, t) = \max_{\nu} |F_{\nu}(f)(x)| t^{|\nu|}$, dunque dato che le $|F_{\nu}(f)|$ sono continue allora $|f(\cdot)| \circ H(\cdot, t)$ è semi-continua inferiormente. Ora, per ogni $x_0 \in U^{\triangleright}$ fissato, $|F_{\nu}(t)| \leq 1$ e $t \in]0, 1[$, dunque per ogni $\varepsilon |F_{\nu}(t)| t^{|\nu|} \leq t^{|\nu|} < H(t, x_0) + \varepsilon$ se $|\nu| \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$, $N = N(x_0, \varepsilon)$ fissato. Allora $\{x \in U^{\triangleright} \mid |f(H(t, x))| < |f(H(t, x_0))| + \varepsilon\} = \bigcap_{\nu, |\nu| \leq N} \{x \in U^{\triangleright} \mid |F_{\nu}(f)(x)| < \varepsilon t^{-|\nu|}\}$ è un intorno di x_0 dunque $|f(\cdot)| \circ H(t, \cdot)$ è semi-continua superiormente e dunque continua. Vediamo infine la continuità di $|f(H(\cdot, \cdot))|$: sia $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times U^{\triangleright}$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$|f(H(t_0, x_0))| - \varepsilon/2 \leq |f(H(t, x_0))| \leq |f(H(t_0, x_0))| + \varepsilon/2$$

per ogni $t \in I = [t_1, t_2]$, $I = I(x_0, t_0, \varepsilon)$ e

$$|f(H(t_1, x_0))| - \varepsilon/2 \leq |f(H(t_1, x))|, \quad |f(H(t_2, x))| \leq |f(H(t_2, x_0))| + \varepsilon/2.$$

e, dato che $|f(H(\cdot, x))|$ è crescente se ne deduce la continuità di $|f(H(\cdot, \cdot))|$.

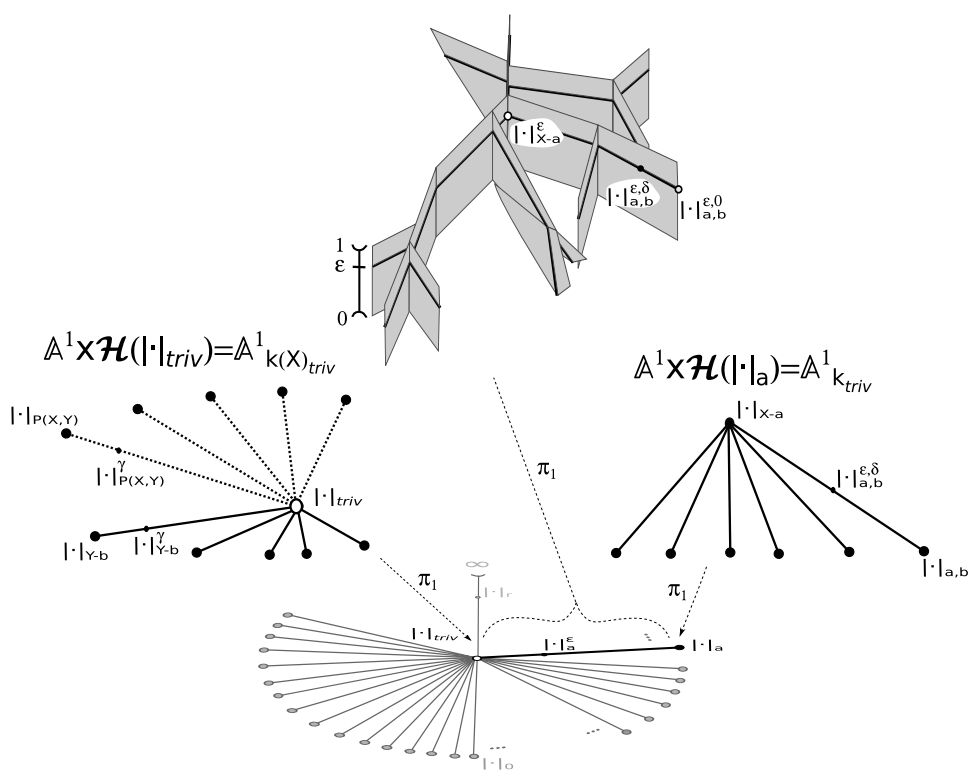
Per terminare la costruzione occorre privare della punta il ventaglio conico appena costruito, infatti è il cono spuntato che sarà fondamentale nella dimostrazione del teorema. Sia ξ l'unico punto generico di X (che è irriducibile dato che contiene un aperto denso irriducibile), allora esiste un solo punto $*$ di X^{\triangleright} sulla fibra rispetto a r_X del punto ξ . Tale punto è cima comune di tutti i coni del ventaglio, dato che ξ è anche il punto generico dell'orbita T -isomorfa a T . Allora, visto che

$$\mathfrak{X}_{\eta} = r_x^{-1}(Y) - \rho^{-1}(Y) = \rho_X^{-1}(X_0) - r_X^{-1}(X_0),$$

si ha che $\mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_{\eta} = \mathfrak{S}_0(X) - \{*\}$, indicheremo questo insieme con $\mathfrak{S}_0^*(X)$. Dato che H stabilizza \mathfrak{X}_{η} (visto che l'azione m commuta con r_X e con ρ_X), questa si restringe a \mathfrak{X}_{η} inducendo un'omotopia che contrae \mathfrak{X}_{η} su $\mathfrak{S}_0^*(X)$.

2.4 Un esempio pratico: $\mathbb{P}_k^{2,an}$

L'ultima parte di questo capitolo è dedicata allo studio del piano proiettivo di Berkovich e del suo ventaglio. Per fare questo, vediamo di studiare

$$\mathbb{A}^1 \times \mathcal{H}(|\cdot|_a^\varepsilon) = \mathbb{A}^1_{k(X)_{a,\varepsilon}}$$


Nel primo caso la fibra è omeomorfa a $\mathcal{M}(k[Y])$ che abbiamo già descritto;

se consideriamo anche la seconda proiezione otteniamo i tre seguenti casi:

$(\pi_1(x), \pi_2(x))$	$x _{k[X]-\{0\}}$	$x _{k[Y]-\{0\}}$	x
$(\cdot _a, \cdot _b)$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto a_0 $	$\sum b_j(Y-b)^j \mapsto b_0 $	(1)
$(\cdot _a, \cdot _b^\delta)$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto a_0 $	$\sum b_j(Y-b)^j \mapsto \max_j b_j \delta^j$	(2)
$(\cdot _a, \cdot _{triv})$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto a_0 $	$\sum b_j(Y-b)^j \mapsto 1$	(3)

Sia $|\cdot|_x$ la semivalutazione corrispondente a x , sia $p_x = \ker |\cdot|_x$ e $q_x = \{|\cdot|_x < 1\}$, dato che la norma è maggiorata da 1 allora q_x è primo, p_x invece lo è in quanto nucleo di una semivalutazione; sia infine $f \in k[X, Y]$:

- (1) $(X-a) \subset p_x, (X-b) \subset p_x$, dunque $p_x = (X-a, X-b)$, $k[X, Y]/p_x = k$ e dunque la norma è banale al di fuori di p_x . Allora

$$|f(x)|_x = \begin{cases} 0 & \text{se } f \in (X-a, Y-b) \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

indicheremo questa semivalutazione in maniera equivalente con $|\cdot|_{a,b}^{0,0}$ o con $|\cdot|_{a,b}$.

- (2) $(X-a) \subset p_x$ e $(X-a) = p_x$ infatti altrimenti p_x sarebbe massimale e dunque della forma $(X-a, Y-b)$ ma per la seconda proiezione sappiamo che $|Y-b|_x \neq 0$. Invece $(Y-b) \subset q_x$ e dunque $q_x = (X-a, Y-b)$ e dato che $k[X, Y]/p_x = k[Y]$ è munito della semivalutazione $|\cdot|_b^\delta$ si ha che, se $[f]$ è la classe di f sulla proiezione su p_x ,

$$|f(x)|_x = \max_j |a_j| \delta^j \quad \text{se } f \in [\sum_j a_j(Y-b)^j]$$

infatti se due elementi g e f sono nella stessa classe di equivalenza rispetto al nucleo di una norma allora $f = g + k$ per un certo k nel nucleo e per disuguaglianza ultrametrica si ha che $|f| = |g|$. Indicheremo questa semivalutazione con $|\cdot|_{a,b}^{0,\delta}$.

- (3) Con lo stesso ragionamento che per (2), $p_x = (X-a)$. Ora, $p_x \subset q_x$ ma q_x non è un ideale massimale, dato che x è banale su $k[Y]$, dunque $p_x = q_x$ e

$$|f(x)|_x = \begin{cases} 0 & \text{se } f \in (X-a) \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

indicheremo questa semivalutazione con $|\cdot|_{X-a}$.

Dunque si ha un omeomorfismo tra la fibra su $|\cdot|_a$ e $\mathcal{M}(k[X])$ definito da

$$\begin{aligned} |\cdot|_{X-a} &\mapsto |\cdot|_{triv}, \\ |\cdot|_{a,b} &\mapsto |\cdot|_b, \\ |\cdot|_{a,b}^{0,\delta} &\mapsto |\cdot|_b^\delta \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la fibra della norma banale, occorre considerare gli ideali primi di $k(X)[Y]$, il che equivale a considerare gli ideali primi di $k[X, Y]$ non generati da un elemento di $k[X]$, i quali sono in bigezione con l'unione dell'insieme dei polinomi $P(X, Y)$ irriducibili con $P(X, Y) \notin k[X]$, $P(X, Y) \notin k[Y]$ e di quello dei polinomi della forma $Y - b$, $b \in k$. Anche in questo caso la seconda proiezione ci permette di descrivere esplicitamente la fibra:

$(\pi_1(x), \pi_2(x))$	$x_{ k[X]-\{0\}}$	$x_{ k[Y]-\{0\}}$	x
$(\cdot _{triv}, \cdot _a)$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto 1$	$\sum b_j(Y-b)^j \mapsto b_0 $	(4)
$(\cdot _{triv}, \cdot _b^\delta)$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto 1$	$\sum b_j(Y-b)^j \mapsto \max_j b_j \delta^j$	(5)
$(\cdot _{triv}, \cdot _{triv})$	$\sum a_i(X-a)^i \mapsto 1$	$\sum b_i(Y-b)^j \mapsto 1$	(6)

Siano $|\cdot|_x$, p_x , q_x e f come sopra:

(4) Come per (3) otteniamo

$$|f(x)|_x = \begin{cases} 0 & \text{se } f \in (Y-b) \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

indicheremo questa semivalutazione con $|\cdot|_{Y-b}^0$ o semplicemente con $|\cdot|_{Y-b}$.

(5) $q_x = (X-a)$ e $p_x \subsetneq q_x$ dunque $p_x = (0)$ e

$$|f(x)|_x = \begin{cases} \max_j |b_j| \delta^j & \text{se } f \in (Y-b), f = \sum_j b_j(Y-b)^j \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

indicheremo questa semivalutazione con $|\cdot|_{Y-b}^\delta$.

(6) $q_x \subsetneq (X-a, X-b)$ dato che $|X-a|_x = |Y-b|_x = 1$, dunque $q_x = (0)$ o $q_x = (P(X, Y))$, con $P(X, Y)$ irriducibile, $P(X, Y) \notin k[X]$, $P(X, Y) \notin k[Y]$ e $P(a, b) = 0$. Nel primo caso p_x è per forza di cose (0) e x è la valutazione banale. Nel seconda caso o $p_x = q_x$ e

$$|f(x)|_x = \begin{cases} 0 & \text{se } f \in (P(X, Y)) \\ 1 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

oppure $p_x = (0)$ e $|P(X, Y)|_x = \gamma > 0$ dunque

$$|f(x)|_x = \begin{cases} \gamma^n & \text{se } P(X, Y)^n |f, P(X, Y)^{n+1} \nmid f \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indicheremo con $|\cdot|_P^0$ o $|\cdot|_P$ il primo tipo e con $|\cdot|_P^\gamma$ il secondo.

Si ha dunque un omeomorfismo evidente tra la fibra sulla norma banale e il disco unitario su $k(X)_{triv}$, definito da:

$$\begin{aligned} |\cdot|_{triv} &\mapsto |\cdot|_{triv}, \\ |\cdot|_{Y-b}^\delta &\mapsto |\cdot|_b^\delta, \\ |\cdot|_P^\gamma &\mapsto |\cdot|_{\bar{P}}^\gamma, \end{aligned}$$

dove \bar{P} è l'immagine di $P(X, Y)$ tramite il morfismo $k[X, Y] \hookrightarrow k(X)[Y]$.

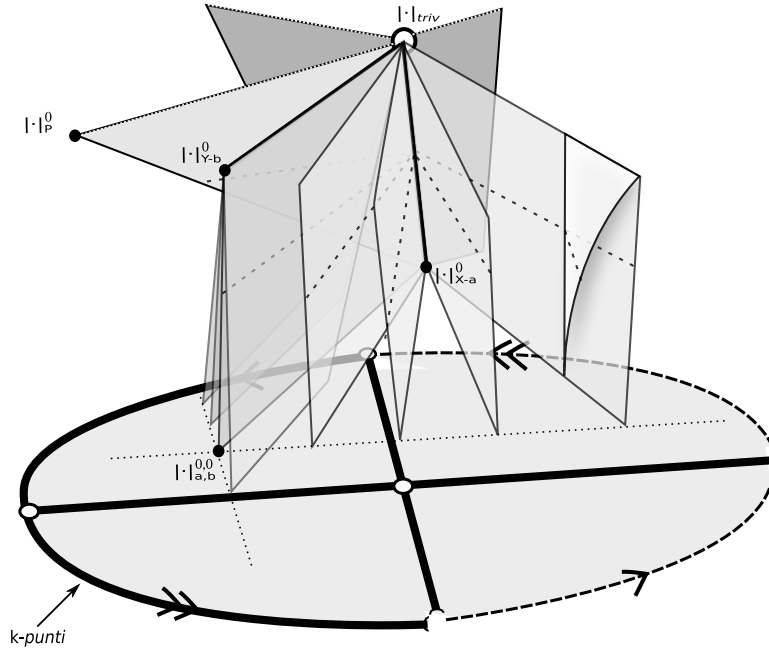


Figura 2.7: Dalla fibra sul disco unitario, tramite incollamento, possiamo rappresentare il piano proiettivo.

Per quanto riguarda le fibre sui punti di tipo $|\cdot|_a^\varepsilon$, non sono esplicitamente definibili, dal momento che sono omeomorfe al disco di Berkovich su un campo con norma non banale. Possiamo comunque dedurre qualche informazione sulla topologia del polidisco. Per prima cosa, dato che le topologie indotte

da $|\cdot|_a^\varepsilon$ e $|\cdot|_a^\eta$ sono equivalenti per ogni $0 < \varepsilon, \eta < 1$, l'immagine inversa del segmento aperto $]]\cdot|_a, |\cdot|_{triv}[$ è omeomorfa a $\mathbb{A}_j^{1,an} \hat{\otimes}_k k(X)_{a,1/2} \times]0, 1[$, inoltre possiamo comunque lavorare un po' sulla seconda proiezione: abbiamo i due casi simmetrici a (2) e (5), che noteremo con $|\cdot|_{a,b}^{\varepsilon,0}$ e $|\cdot|_{X-a}^\varepsilon$, mentre nel caso in cui x si proietta su $(|\cdot|_a^\varepsilon, |\cdot|_b^\delta)$ abbiamo poco controllo: sicuramente ci sono le valutazioni

$$|\cdot|_{a,b}^{\varepsilon,\delta} : \sum |a_{i,j}|(X-a)^i(Y-b)^j \mapsto \max_{i,j} |a_{i,j}| \varepsilon^i \delta^j,$$

ma da questi punti possono partire infinite ramificazioni. Quel che è certo è che l'immagine inversa dei $]]\cdot|_a, |\cdot|_{triv}[$ deve essere compattificata dalla fibra sui k -punti e sul punto di Shilov, inoltre il punto di Gauss corrisponderà a $|\cdot|_{X-a}^\varepsilon$. Possiamo dunque raffigurarci $\mathbb{P}^{an,k}$ come un scheletro di “pagine” indicizzate dai k -punti (a, b) e composte dalle semivalutazioni $|\cdot|_{a,b}^{\varepsilon,\delta}$, ciascuna avente due “costole” $|\cdot|_{X-a}^\gamma$, $|\cdot|_{Y-b}^\gamma$ e tutte riunite nell'angolo opposto al k -punto in $|\cdot|_{triv}$. Da questo scheletro partono altre “pagine” aperte su due lati che si compattificano o riducendosi a un punto oppure incollandosi a una delle costole (ovvero dei rami delle fibre sui k -punti o sulla norma banale).

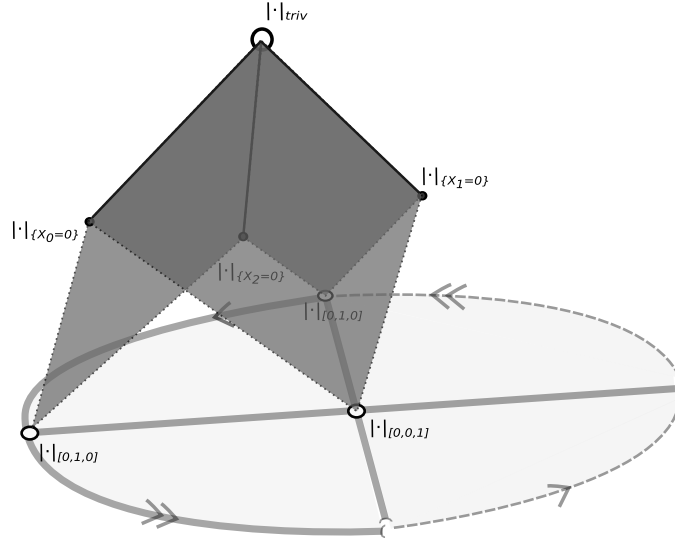


Figura 2.8: Il cono $\mathfrak{S}_0(\mathbb{P}_k^1)$.

Sia dunque $X = \mathbb{P}_k^1$, ricoperto dagli aperti $U_i = \{X_i \neq 0\}$, $i = 0, 1, 2$. Allora X^\triangleright si ottiene dagli U_i^\triangleright , incollandoli lungo gli $(U_i \cap U_j)^\triangleright$, e su ogni U_i^\triangleright

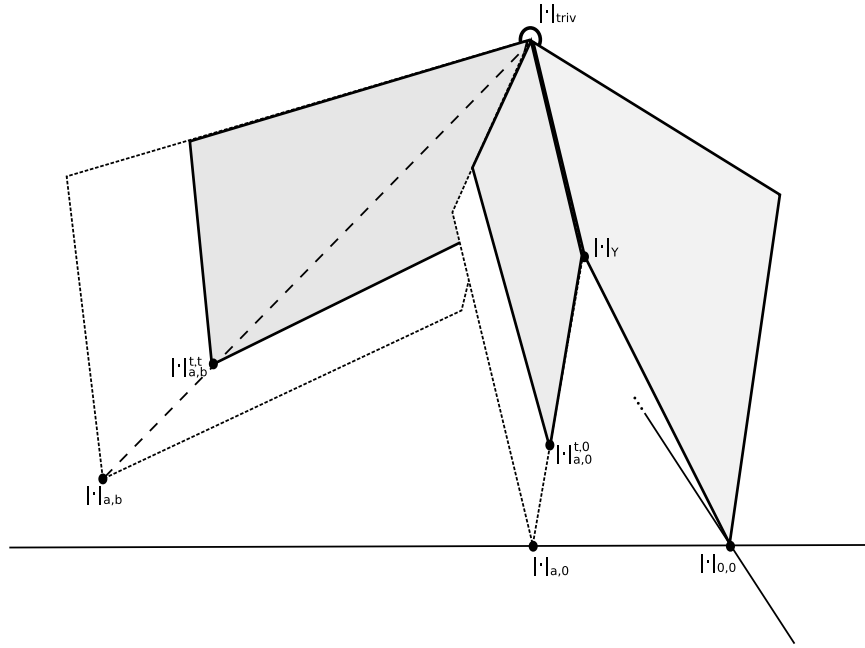
il morfismo \mathbf{p} manda x su

$$\sum a_{i,j} X^i Y^j \mapsto \max_{i,j} |a_{i,j}| |X^i Y^j(x)|$$

dunque i punti fissi sono i punti associati alle valutazioni del tipo

$$|\cdot|_{a,b}^{\varepsilon,\delta}, \quad |\cdot|_{X_i=0}^\gamma, \quad |\cdot|_{triv},$$

con $a \neq b$, $a, b \in \{[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0]\}$, $i = 0, 1, 2$ e $0 \leq \varepsilon, \delta, \gamma < 1$.



Per capire come agisce l'omotopia, vediamo cosa fa a livello dei k -punti: sia x un k -punto di \mathbb{P}_k^1 , x è contenuto in uno dei tre aperti affini $U_i = \{X_i \neq 0\}$, e in questo aperto ha coordinate (a, b) , ogni k -punto di $U_i^\square \subset \mathbb{P}_k^{1,an}$ è allora della forma $x = |\cdot|_{a,b}$. Se $a = b = 0$ allora $x \in \mathfrak{S}(X)$ e $H(t, x) = x$ per ogni $t \in [0, 1]$; se $a \neq 0, b = 0$ allora $H(t, x) = |\cdot|_{a,b}^{t,0}$ per ogni $t \in [0, 1]$, se infine $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $H(t, x) = |\cdot|_{a,b}^{t,t}$ per ogni $x \in [0, 1]$. In questo caso $\mathfrak{S}_0^*(X)$ è il cono $\mathfrak{S}(X)$ privo della valutazione banale.

Capitolo 3

Il ventaglio di un'immersione toroidale, applicazione ai divisori a intersezione trasversa

Scopo di quest'ultimo capitolo è estendere la costruzione del ventaglio fatta nel capitolo precedente alle immersioni toroidali ed infine applicare questi risultati al teorema sui divisori a intersezione trasversa.

3.1 La costruzione del ventaglio per un'immersione toroidale semplice

Definizione 3.1.1. *Un'immersione toroidale semplice è l'insieme di un k -schema normale X e d'un aperto (denso) $X_0 \subset X$ tale che per ogni $x \in X$ esista un intorno aperto U_x di x e un morfismo étale $\gamma : U_x \rightarrow Z_x$ verso una varietà torica Z_x tale che l'immagine inversa dell'orbita aperta $Z_{x,0}$ sia l'intersezione di X_0 con U_x . L'aperto U_x insieme con il morfismo γ è chiamato una carta étale (centrata in x). Un ricoprimento di carte étale è chiamato, chiaramente, un atlante.*

Osservazione 3.1.2. *Quando il punto x non avrà particolare importanza ometteremo l'indice x e indicheremo semplicemente con $\gamma : U \rightarrow Z$ una carta étale su U .*

Sia X una varietà torica, X_0 l'orbita aperta T -isomorfa a T , e per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia X_i l'unione delle orbite aperte di $X - (X_0 \cup \dots \cup X_{i-1})$. Allora $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è una stratificazione di X e ogni X_i è costituito di parti localmente chiuse e

irriducibili. Per esempio, se $X = \mathbb{P}_k^2$ si ha che $X_0 \simeq \mathbb{G}_m^2$, $X_1 \simeq \mathbb{G}_m^1 \sqcup \mathbb{G}_m^1 \sqcup \mathbb{G}_m^1$ e $X_2 = \{[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0]\}$. In maniera del tutto simile, se $X_0 \hookrightarrow X$ è un'immersione toroidale possiamo definire la sua stratificazione utilizzando l'immagine inversa della stratificazione delle varietà toroidali Z_x .

Esempio 3.1.3. *L'esempio più immediato di immersione toroidale semplice è l'immersione di un aperto U di una varietà torica nella varietà stessa, in questo caso, la stratificazione non è altro che l'intersezione dei X_i con*



l'aperto U .

Grazie alla stratificazione e all'atlante étale è possibile estendere la costruzione del ventaglio $\mathfrak{S}(X)$ e della retrazione di deformazione di X^\natural su $\mathfrak{S}(X)$. Per molti degli enunciati daremo solamente l'idea della dimostrazione.

Definizione 3.1.4. *Sia $X_0 \hookrightarrow X$ un'immersione toroidale semplice, allora*

$$\Xi(X) = \{\xi \in X \mid \exists \gamma : U_\xi \rightarrow Z_\xi \text{ carta étale con } \gamma(\xi) \in \Xi(Z_x)\}.$$

Verifichiamo che questa definizione non dipenda dall'atlante su X : a meno di restringersi all'intersezione di U_ξ e U'_ξ possiamo supporre che $U_\xi = U'_\xi$. Siano dunque $\gamma : U_\xi \rightarrow Z_\xi$ e $\beta : U_\xi \rightarrow Z'_\xi$ due carte étale, $\gamma^{-1}(Z_{\xi,0}) = \beta^{-1}(Z'_{\xi,0}) = U_\xi \cap X_0$, vogliamo allora mostrare che $\gamma^{-1}(\Xi(Z_\xi)) = \beta^{-1}(\Xi(Z'_\xi))$. Questo equivale a dimostrare che $\gamma^{-1}(Z_{\xi,i}) = \beta^{-1}(Z'_{\xi,i})$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ dato che per definizione $\Xi(Z) = \bigcup \Xi(Z_i)$. Per $i = 0$ è esattamente l'ipotesi, per $i > 0$ si ha che Z_i è semplicemente l'insieme dei punti regolari di $Z - (Z_0 \cup \dots \cup Z_{i-1})$: vi è certamente contenuto, dato che ogni orbita aperta è fatta di punti regolari. L'altra inclusione si deduce dal fatto che ogni orbita non aperta è bordo di due orbite aperte e, passando al ventaglio associato, è intersezione di due facce distinte e dunque, sullo schema, di due orbite irriducibili (e in particolare nessuno punto è regolare), da questa caratterizzazione, dato che γ e γ' sono étale, si ha che $\gamma^{-1}(Z_{\xi,i}) = \beta^{-1}(Z'_{\xi,i})$ per ogni $i > 0$.

Abbiamo dunque un insieme $\Xi(X)$ che nel caso di una varietà torica corrisponde ai punti generici delle orbite, e vorremmo a questo punto definire

su X l'equivalente delle orbite sulle varietà toriche. Per ogni $\xi \in \Xi(X)$ sia dunque

$$\Sigma(\xi) = \overline{\{\xi\}} - \bigcup_{\substack{\zeta \in \Xi(X) \\ \zeta \in \overline{\{\xi\}} - \xi}} \overline{\{\zeta\}}$$

lo *strato* di x . Dato che $\Xi(X)$ è localmente finito, $\Sigma(\xi)$ è localmente chiuso, inoltre è irriducibile e le $\Sigma(\xi)$ formano una partizione di X . La chiusura di $\Sigma(\xi)$ è l'unione dei $\Sigma(\zeta)$ con ζ che percorre l'insieme $\Xi(X) \cap \overline{\{\xi\}}$ dato che ogni varietà torica è ricoperta dalle sue orbite.

Sia $\gamma : U_x \rightarrow Z_x$ una carta étale e O un'orbita di Z_x , allora, se ξ è il suo punto generico, $O = O(\xi) = \Sigma(\xi)$ e dato che γ è un morfismo étale (e quindi in particolare quasi finito), si ha che

$$\gamma^{-1}(O) = \bigcup_{\zeta \in \gamma^{-1}(\xi)} \Sigma(\xi) \cap U_x,$$

osserviamo che $\gamma^{-1}(\xi) = \Xi(X) \cap \gamma^{-1}(O)$.

Per costruire il ventaglio su X occorre definire dei aperti che suppliscano al ruolo che avevano gli aperti affini invarianti nel caso di una varietà torica, per ogni $\xi \in \Xi(X)$ sia dunque

$$X(\xi) = \bigcup_{\zeta \in \Xi(X), \xi \in \overline{\{\zeta\}}} \Sigma(\zeta),$$

è un aperto, dato che è un sottoinsieme di X costruttibile e stabile per generalizzazione, e se X è una varietà torica è un aperto affine (infatti $r^{-1}(X(\xi)) \cap \mathfrak{S}_0(X)$ è un cono del ventaglio di X) e invariante (dato che è unione di orbite). Utilizzeremo dunque l'immagine inversa dei ventagli tramite le carte étale, grazie alla seguente fondamentale proposizione che garantisce che, a meno di restringersi agli aperti $X(\xi)$, $\xi \in \Xi$, si ha un omeomorfismo su quest'immagine inversa. Questo ci permetterà dunque di ricondurci al caso torico e di trasportare in maniera completamente equivalente la costruzione del capitolo precedente.

Proposizione 3.1.5. *Sia $\xi \in \Xi(X)$ e $\gamma : U_\xi \rightarrow Z_\xi$ una carta étale tale che $U_\xi \subset X(\xi)$, e sia $\zeta = \gamma(\xi)$. Allora $(\gamma^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(Z_\xi(\xi)))$ è isomorfo a $\mathfrak{S}(Z_\xi(\xi))$ tramite γ^\triangleright .*

La dimostrazione, che non riportiamo, si basa sul fatto che, supponendo $Z_\xi = Z_\xi(\xi)$, $\Xi(X) \cap U$ è in biezione via γ con $\Xi(Z_\xi)$ il che permette di

dimostrare che γ^\triangleright induce una bigezione (e dunque un omeomorfismo) tra i coni.

Mostriamo infine che il ventaglio toroidale è un ventaglio di coni (anche se non più simpliciale ma poliedrale), costruendo un omeomorfismo con un ventaglio di coni aperti intrinsecamente definito su X^\triangleright e considerando in seguito la sua chiusura.

Sia dunque $X_0 \hookrightarrow X$ un'immersione toroidale semplice, U un aperto di X , e sia $\Lambda(U)$ il sottogruppo dei divisori di Cartier a supporto contenuto in $U - (U \cap X_0)$, sia infine $\Lambda(U)_+$ il semigruppato di quelli effettivi. Per esempio se X è una varietà toroidale affine su $T = \mathbb{G}_m^n$,

$$X = \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_m^{-1}]), \quad 1 \leq m \leq n,$$

allora $\Lambda(X)$ è formato dai divisori (di Weil) della forma $\sum_{i=m+1}^n a_i \{X_i = 0\}$, $a_i \in \mathbb{Z}$ e $X_i \mapsto \{X_i = 0\}$ induce un isomorfismo da $\bigoplus_{i=m+1}^n \mathbb{Z}X_i$ su $\Lambda(X)$ e da $\bigoplus_{i=m+1}^n \mathbb{N}X_i$ su $\Lambda(X)_+$.

Sia dunque U un aperto di X , x un punto di $U^\triangleright \cap \rho^{-1}(X_0)$ e f un'equazione che definisce $D \in \Lambda(X)$ su un intorno V di x . Se g è un'altra equazione che definisce D su $W \subset V$ aperto affine, allora esiste $h \in \mathcal{O}_X(W)^*$ tale che $f|_W = gh$. Dato che h è un'unità e $|h(\cdot)| \leq 1 = |h|_{\text{triv}}$ su W^\triangleright allora $|h(\cdot)| = 1$ su W^\triangleright , dunque $|f(x)| = |g(x)|$, e il morfismo $|D|(x) = |f(x)|$ è ben definito. Notiamo che, dato che $D \in \Lambda(U)$ e $x \in \rho^{-1}(X_0)$, allora il numero reale $|D|(x)$ è strettamente positivo e quindi risultano ben definiti l'omomorfismo d'anneali

$$\nu_U : \Lambda(U) \rightarrow C^0(U^\triangleright \cap \rho^{-1}(X_0), \mathbb{R}_{>0}), \quad D \mapsto |D|$$

e il morfismo tautologico associato

$$\nu_U^\vee = \mu_U : U^\triangleright \cap \rho^{-1}(X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}}(\Lambda(U), \mathbb{R}_{>0}), \quad x \mapsto (D \mapsto |D|(x)).$$

Proposizione 3.1.6. *Sia $\xi \in \Xi(X)$ e $\gamma : U_\xi \rightarrow Z_\xi$ una carta étale in ξ con $U_\xi \subset X(\xi)$. allora:*

- i) $\text{Im}(\mu_U) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(\Lambda(U)_+, \mathbb{R}_{>0})$ e μ_U realizza un omeomorfismo tra $(\gamma^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}_0(Z_\xi))$ e la sua immagine.
- ii) Per ogni punto u di $\text{Im}(\mu_U)$, $\mu_U^{-1}(u)$ è un dominio affinoide e il suo bordo di Shilov è la sua intersezione con $(\gamma^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(Z_\xi))$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $Z_\xi = Z_\xi(\gamma(\xi))$, nel qual caso, dalla normalità di U_ξ (che deriva da quella di X) e utilizzando il fatto che γ è étale,

possiamo dimostrare che $\gamma^* \otimes id_{\mathbb{Q}} : \Lambda(Z_\xi) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \Lambda(U_\xi) \otimes \mathbb{Q}$ è un isomorfismo. L'insieme $\sigma = Hom_{Mon}(\Lambda(U)_+,]0, 1])$ è evidentemente un cono, e μ_{U_ξ} è a valori in σ : in effetti $|D|$ è maggiorato da 1 se e solo se D è effettivo e ogni elemento di $Hom_{Ab}(\Lambda(U), \mathbb{R}_{>0})$ è univocamente determinato dalla sua restrizione a $\Lambda_+(U)$.

(i) Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_\xi^\triangleright \cap \rho^{-1}(X_0) & \xrightarrow{\mu_{U_\xi}} & Hom_{Mon}(\Lambda(U_\xi)_+,]0, 1]) \\ \downarrow \gamma^\triangleright & & \downarrow 1:1 \mid (\gamma^*)^* \\ Z_\xi^\triangleright \cap \rho^{-1}(Z_{\xi,0}) & \xrightarrow{\mu_{Z_\xi}} & Hom_{Mon}(\Lambda(Z_\xi)_+,]0, 1]), \end{array}$$

per la Proposizione 3.1.5, γ^\triangleright realizza un omeomorfismo tra $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z_\xi))$ e $\mathfrak{S}(Z_\xi)$, e da quanto visto sulle costruzioni sulle varietà toriche, $\mu_{Z_\xi} = J$ è surgettiva e realizza un omeomorfismo tra $\mathfrak{S}_0(Z_\xi)$ e la sua immagine. Inoltre dato che $\Lambda(Z_\xi) \otimes \mathbb{Q}$ è isomorfo a $\Lambda(U_\xi) \otimes \mathbb{Q}$ tramite γ^* allora $(\gamma^*)^*$ è bigettiva.

(ii) Siano $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_{Z_\xi}(Z_\xi)$ generatori di $\Lambda_+(Z_\xi)$, $u \in Im(\mu_{U_\xi})$, e $v = u \circ \gamma^*$. Dato che $\mu_{Z_\xi}^{-1}(v) = \{|f_i| = v(f_i)\}$, utilizzando il diagramma del punto (i) si verifica che $\mu_{U_\xi}^{-1}(u) = \{|\gamma^\# f_i| = u(\gamma^\# f_i)\}$ che è in effetti un dominio affinoide. Per quanto riguarda il bordo di Shilov di $\mu_{Z_\xi}^{-1}(v)$ sappiamo che è la sua intersezione con $\mathfrak{S}(Z_\xi)$, per la bigettività di γ si ha dunque la tesi.

□

Abbiamo dunque un perfetto candidato ad essere il ventaglio torico aperto di X , vediamo allora come costruire la sua compattificazione canonica $\mathfrak{S}(X)$. Nel caso di una varietà torica abbiamo dimostrato che $\mathfrak{S}(X)$ è semplicemente l'insieme dei punti fissi di \mathbf{p}_X o, equivalentemente, dei punti della sua immagine. Definiamo dunque \mathbf{p}_X come l'unico endomorfismo di $\mathfrak{X}^\triangleright$ tale che, per ogni carta étale $\gamma : U \rightarrow Z$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U^\triangleright & \xrightarrow{\mathbf{p}_U} & U^\triangleright \\ \downarrow \gamma^\triangleright & & \downarrow \gamma^\triangleright \\ Z^\triangleright & \xrightarrow{\mathbf{p}_Z} & Z^\triangleright \end{array}$$

commuti. Per la Proposizione 3.1.5 (a meno di restringersi a $U(\xi)$ e $Z(\gamma(\xi))$) $\mathbf{p}_Z(Z^\triangleright) = \mathfrak{S}(Z)$ e $\mathfrak{S}(U) = (\gamma^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(Z))$, dunque questo morfismo è definito a livello degli aperti U_ξ delle carte étale centrate negli $\xi \in \Xi(X)$, esiste dunque per ogni U_ξ un \mathbf{p}_{U_ξ} per i quali il diagramma commuta. Si tratta dunque di verificare l'incollamento: dato che $\mathfrak{S}(Z_\xi) = \mathbf{p}_{Z_\xi}(Z_\xi)$, per la commutatività del diagramma relativo agli U_ξ e il secondo punto della Proposizione 3.1.6, su $U_\xi^\triangleright \cap \rho^{-1}(X_0)$ il morfismo \mathbf{p}_{U_ξ} associa a x l'unico punto di Shilov di $\mu_{U_\xi}^{-1}(\mu_{U_\xi}(x))$. Per continuità le \mathbf{p}_{U_ξ} sono definite indipendentemente dalla carta γ e dunque si incollano definendo \mathbf{p}_X . Per il modo in cui è definita, è chiaro che verifica $\mathbf{p}_X^2 = \mathbf{p}_X$, definiamo dunque $\mathfrak{S}(X)$ come l'insieme dei punti fissi di \mathbf{p}_X , ovvero la sua immagine, e $\mathfrak{S}_0(X) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0)$.

Continuiamo le generalizzazioni: rimande da definire p e l'omotopia H tra \mathbf{p} e l'identità.

Terminiamo questo paragrafo concentrando su p : ogni punto di x è contenuto in un unico strato $\Sigma(x)$, sia allora $p : X \rightarrow X$ il morfismo che manda x nel punto generico di $\Sigma(x)$. La sua immagine è $\Xi(X)$, inoltre per l'isomorfismo tra $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z_\Xi))$ e $\mathfrak{S}(Z_\xi)$ e per i teoremi equivalenti relativi alle varietà toriche, se ne deduce che i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{\mathbf{p}_X} & X^\triangleright \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{p_X} & X \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{\mathbf{p}_X} & X^\triangleright \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{p_X} & X \end{array}$$

commutano.

Esattamente come nel secondo capitolo si ottiene allora che, per ogni $\xi \in \Xi(X)$,

$$\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\Sigma(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\xi)$$

e

$$\mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\Sigma(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\xi).$$

per ogni $\xi \in \Xi(X)$, si ha dunque una struttura di cono razionale su $\mathfrak{S}_0(X(\xi)) = \mathfrak{S}_0(X) \cap r^{-1}(X(\xi))$ definita da

$$\nu_{X(\xi)} : \Lambda(X(\xi)) \rightarrow C^0(\mathfrak{S}_0(X(\xi)), \mathbb{R}_{>0}).$$

Come nel caso delle varietà toriche per ogni $\eta \in \Xi(X)$ generalizzazione di ξ

$$\mathfrak{S}_0(X(\eta)) = \mathfrak{S}_0(X(\xi)) \cap X(\eta)^\triangleright,$$

e i morfismi

$$\begin{aligned}\Xi(X) \cap \{\text{generalizzazione di } \xi\} &\rightarrow \{\text{facce di } \mathfrak{S}_0(X(\xi))\} \\ \eta &\mapsto \mathfrak{S}_0(X(\eta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi(X) \cap \{\text{generalizzazione di } \xi\} &\rightarrow \{\text{interno delle facce di } \mathfrak{S}_0(X(\xi))\} \\ \eta &\mapsto \mathfrak{S}_0(X(\eta) \cap r^{-1}(\eta))\end{aligned}$$

sono delle bigezioni.

Si ha dunque una struttura di cono razionale poliedrale, che chiameremo, similmente a prima, il *ventaglio* dell'immersione toroidale semplice $X_0 \hookrightarrow X$. Se $\xi \in \Xi(X)$, allora $\overline{\Sigma}(\xi)$ è un sottoschema ridotto di X , e l'immersione $\Sigma(\xi) \hookrightarrow \overline{\Sigma}(\xi)$ è un'immersione toroidale, dato che $\overline{\Sigma}(\xi)$ è l'unione dei $\Sigma(\zeta)$ con ζ che percorre l'insieme $\Xi(X) \cap \overline{\{\xi\}}$ e per ogni varietà normale Z e ogni orbita O , \overline{O} è normale e O è la sua orbita aperta. Questo ci permette di riportare su X i risultati di compattificazione di $\mathfrak{S}_0(X)$ che erano validi sulle varietà toriche:

Proposizione 3.1.7. *Il sottoinsieme chiuso $\mathfrak{S}(X)$ di X^\triangleright è la compattificazione canonica di $\mathfrak{S}_0(X)$, ed è ricoperto dai coni strettamente convessi $X(\xi)^\triangleright$, $\xi \in \Xi(X)$. L'immersione chiusa $\overline{\Sigma}(\xi)^\triangleright \hookrightarrow X^\triangleright$ induce un isomorfismo tra $\mathfrak{S}(\overline{\Sigma}(\xi))$ e $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\overline{\Sigma}(\xi))$ e*

$$\mathfrak{S}(X) - \mathfrak{S}_0(X) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \mathfrak{S}(\overline{\Sigma}(\xi))$$

3.2 L'omotopia su un'immersione toroidale semplice

Come possiamo immaginare, l'omotopia H verrà definita a partire dalle omotopie sulle varietà toriche tramite les carte étale. Procederemo nella seguente maniera: per prima cosa rimonteremo localmente H a H_γ sugli aperti delle carte étale γ , tramite l'azione del completato formale di T in 1. Per incollare H ad un morfismo su tutto X^\triangleright occorrerà in seguito verificare che le H_γ stabilizzino le intersezioni e basterà a questo punto verificare che H_γ non dipenda dalla carta ma solo dall'aperto, per poter incollare le H_γ all'omotopia $H(x, t)$.

Cominciamo con il primo passo:

Definizione 3.2.1. *Se G è un gruppo algebrico indichiamo con \hat{G}_1 il completato formale di G al punto unità.*

Sia per esempio $G = \mathbb{G}_m^1$, il suo punto unità corrisponde all'ideale $(X - 1)$, dunque G_1 è il punto 1 di \mathbb{A}_k^1 con l'anello $k[X, X^{-1}]$ completato per la topologia $(X - 1)$ -adica, ovvero l'anello delle serie formali $k[[X - 1]]$. Sia Z un k -schema e G un k -schema in gruppo che agisce su Z tramite l'azione $m : G \times Z \rightarrow Z$, allora $\hat{G}_1 \times Z \xrightarrow{i \times m} G \times Z \xrightarrow{m} Z$ è un'azione di k -schemi formali. Per ogni $\gamma : U \rightarrow Z$ étale esiste una e una sola azione di k -schemi formali $m_\gamma : \hat{G}_1 \times U$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_1 \times U & \xrightarrow{m_\gamma} & U \\ \downarrow id \times \gamma & & \downarrow \gamma \\ \hat{G}_1 \times Z & \xrightarrow{m} & Z, \end{array}$$

commuti, dato che possiamo considerare il pull-back nella categoria dei k -schemi formali :

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{f}{\dashrightarrow} & U \\ \downarrow g & & \downarrow \gamma \\ \hat{G}_1 \times U & \xrightarrow{id \times \gamma} & \hat{G}_1 \times Z \xrightarrow{m} Z \end{array}$$

con g étale (dato che γ lo è). Inoltre dato che il punto 1 corrisponde all'identità possiamo completare il diagramma preservando la commutatività:

$$\begin{array}{ccccc} & U & & & \\ & \downarrow id_U & & \searrow id_U & \\ & V & \xrightarrow{f} & U & \\ & \downarrow g & & \downarrow \gamma & \\ \{1\} \times U & \xrightarrow{i \times id} \hat{G}_1 \times U & \xrightarrow{id \times \gamma} & \hat{G}_1 \times Z & \xrightarrow{m} Z \\ & \searrow i \times \gamma & & & \end{array}$$

σ_0 (dotted arrow from $\{1\} \times U$ to V)

il che fornisce una sezione $\sigma_0 : 1 \times U \rightarrow V$. Dato che g è étale questa sezione si estende a una e una sola σ su tutto $\hat{G}_1 \times U$ e $m_\gamma = f \circ \sigma$ è l'azione cercata.

Consideriamo dunque una carta étale $\gamma : U \rightarrow Z$, con

$$T = k[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$$

il toro di Z e sia $\mathfrak{T} = T_1$. Il suo spazio di Berkovich associato \mathfrak{T}^\natural è il sottoinsieme $r^{-1}(1)$ di T^\natural , dunque è l'insieme

$$\{x \in T^\natural \mid |X_i - 1| < 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$$

(sono le semivalutazioni che raffinano la topologia di \mathfrak{T} e $\mathfrak{T}^\triangleright$ è in effetti l'unione per $t \in [0, 1[$ dei $G_k(t)$ del secondo capitolo).

Per quanto abbiamo appena visto, esiste un'azione $m_\gamma : \mathfrak{T} \times U \rightarrow U$ che induce

$$m_\gamma^\triangleright : \mathfrak{T}^\triangleright \times U^\triangleright \rightarrow U^\triangleright$$

e per la quale $\gamma^\triangleright : U^\triangleright \rightarrow Z^\triangleright$ è equivariante. Possiamo allora definire

$$H_\gamma : [0, 1] \times U^\triangleright \rightarrow U^\triangleright$$

$$H(t, x) = \begin{cases} (\mathfrak{T}^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow U^\triangleright)(g_{\mathcal{H}(x)}(t)) & \text{se } t \in [0, 1[\\ \mathbf{p}_X(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo morfismo fa evidentemente commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times U^\triangleright & \xrightarrow{H_\gamma} & U^\triangleright \\ \downarrow id \times \gamma & & \downarrow \gamma \\ [0, 1] \times Z^\triangleright & \xrightarrow{H_Z} & Z^\triangleright \end{array}$$

È ugualmente evidente che $H(0, \cdot) = id_{U^\triangleright}$, $H(1, \cdot) = \mathbf{p}_U$, non resta che verificare che H è continua, il che si fa riconducendosi al caso in cui $U = U(\xi)$, $Z = Z(\gamma(\xi))$, utilizzando la Proposizione 3.1.5 e poi ricalcando la dimostrazione nel caso delle varietà toroidali (con una piccola attenzione per la continuità in $t = 1$); il fatto che $H(t, \cdot)|_{\mathfrak{S}(X)} = id_{\mathfrak{S}(X)}$ deriva dal diagramma e dalla Proposizione 3.1.5.

Vediamo dunque di incollare le H_γ ad un'unica applicazione H definita su tutto X^\triangleright : per quanto riguarda le intersezioni, le fibre di $r : U^\triangleright \rightarrow U$ sono stabilizzate da $H_\gamma(t, \cdot)$ per ogni t , dunque se $\gamma' : U' \rightarrow Z'$ è un'altra carta étale H_γ e $H_{\gamma'}$ stabilizzano $(U \cap U')^\triangleright = U^\triangleright \cap U'^\triangleright$. Resta dunque solo a verificare che le due carte étale inducono lo stesso morfismo H , il che non è banale ma piuttosto tecnico per cui non ne forniremo qui una dimostrazione.

Per terminare utilizziamo queste costruzioni per dimostrare il seguente teorema sul completato formale d'un immersione toroidale, che comincia ad avere una forma simile a quello enunciato nell'introduzione:

Proposizione 3.2.2. *Sia $X_0 \hookrightarrow X$ un'immersione toroidale semplice e sia \mathfrak{X} il completato formale di X lungo $X - X_0$, allora $\mathbf{p}_X : \mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ manda \mathfrak{X}_η su*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta = \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(X_{gen})$$

dove X_{gen} sono i punti generici di X . Inoltre l'omotopia H stabilizza \mathfrak{X}_η e lo contrae su $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$.

Dimostrazione. Punto chiave della dimostrazione è che se Y è un chiuso di X e \mathfrak{X} il completato di X lungo Y allora $\mathfrak{X}_s^\triangleright = r_X^{-1}(Y) \cap \rho^{-1}(Y)$ dunque, nel nostro caso, \mathfrak{X}_η è l'intersezione di $\rho^{-1}(X_0)$ con $X^\triangleright - r^{-1}(X_0)$: \mathbf{p}_X manda $\rho^{-1}(X_0)$ su $\mathfrak{S}_0(X)$, e $\mathbf{p}_X(r^{-1}(X_{gen})) = r^{-1}(X_0)$ (dato che p_X manda x sul punto generico del suo strato) dunque

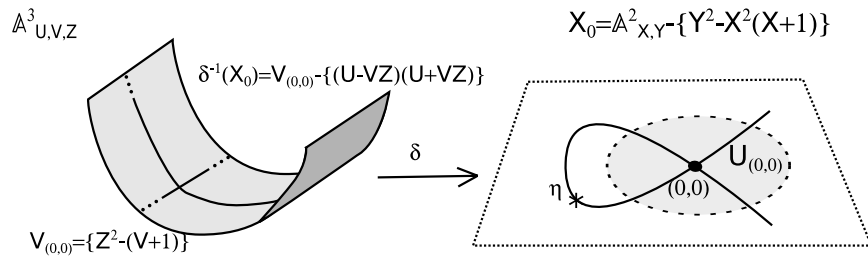
$$\mathbf{p}_X(\mathfrak{X}_\eta) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0) - \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(X_0) = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$$

Inoltre dato che $H(t, \cdot)$ stabilizza le fibre di r e ρ per ogni t , allora manda \mathfrak{X}_η su se stessa e come abbiamo appena visto la contrae su $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. \square

3.3 La costruzione nel caso di immersioni toroidali generiche

Prima di poter applicare le costruzioni fatte finora alla dimostrazione del teorema ovvero al caso in cui tali immersioni siano dei divisori a intersezione trasversa occorre fare un'ultima generalizzazione: fino a questo momento abbiamo infatti lavorato su immersioni toroidali semplici e occorre quindi estendere tale costruzione al caso delle immersioni toroidali generiche.

Definizione 3.3.1. *Un immersione toroidale (generica) è il dato di un k -schema X e un aperto denso X_0 tale che per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x e un morfismo étale surgettivo $\delta : V_x \rightarrow U_x$ tali che l'immersione aperta $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V_x$ sia un'immersione toroidale semplice. Chiameremo δ una pre-carta étale (in x).*



Esempio 3.3.2. *Un esempio di immersione toroidale non semplice è $X_0 = \mathbb{A}_k^2 - \{Y^2 = X^2(X+1)\} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^2$. Un esempio di pre-carta étale in $(0,0)$ è*

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[X, Y] & \rightarrow & k[U, V, Z]/Z^2 - (V+1) \\ X & \mapsto & V \\ Y & \mapsto & Z, \end{array}$$

questo morfismo induce un morfismo étale δ da $V_{(0,0)} = \{Z^2 - (V+1)\} \cap \{V \neq -1\}$ su $U_{(0,0)} \mathbb{A}_k^2 - \{X+1\}$ e $\delta^{-1}(X_0) = V_{(0,0)} - (U - VZ)(U + VZ)$ è un'immersione toroidale semplice in $V_{(0,0)}$.

Per prima cosa notiamo che se $U_0 \hookrightarrow U$ è un'immersione toroidale semplice e $\nu : V \rightarrow U$ un morfismo étale, allora $\nu^{-1}(U_0) \hookrightarrow V$ è un'immersione toroidale semplice: basta verificare che $\nu^{-1}(U_0)$ sia densa, le pre-carte ne derivano per composizione. Ma, dato che ν è étale, è in particolare aperta, da cui la densità di $\nu^{-1}(U_0)$. Inoltre se ci restringiamo alle pre-carte étale

$$\nu^{-1}(U') \xrightarrow{\nu} U' \xrightarrow{\gamma} Z$$

sappiamo dalla sezione precedente che

$$\mathfrak{S}(V) \cap ((\nu^\triangleright)^{-1}(U')^\triangleright) = (\gamma^\triangleright \circ \nu^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) = (\nu^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(U'))$$

e dunque $\mathfrak{S}(V) = (\nu^\triangleright)^{-1}(\mathfrak{S}(U))$ e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times V^\triangleright & \xrightarrow{H_V} & V^\triangleright \\ \downarrow id \times \nu & & \downarrow \nu \\ [0, 1] \times U^\triangleright & \xrightarrow{H_U} & U^\triangleright \end{array}$$

commuta.

Per quanto riguarda i punti generici degli strati di U e V , sempre per composizione e per i risultati ottenuti nel caso delle immersioni toroidali semplici, se $\xi \in \Xi(U)$ e $\zeta \in \Xi(V)$ con $\nu(\zeta) = \xi$, allora ν realizza un omeomorfismo tra $\mathfrak{S}(V(\zeta))$ e $\mathfrak{S}(U(\xi))$ e una bigezione tra $\Xi(V(\zeta))$ e $\Xi(U(\xi))$.

Se $X_0 \hookrightarrow X$ è un'immersione toroidale possiamo dunque definire $H_X : [0, 1] \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$ come il solo morfismo che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times V^\triangleright & \xrightarrow{H_V} & V^\triangleright \\ \downarrow id \times \delta & & \downarrow \delta \\ [0, 1] \times U^\triangleright & \xrightarrow{H_U} & U^\triangleright \end{array}$$

per ogni aperto U di X e ogni pre-carta étale $\delta : V \rightarrow U$, e da H dedurre la definizione di \mathbf{p}_X come $H_X(1, \cdot)$. Il morfismo \mathbf{p}_X è per definizione una retrazione di X^\triangleright su $\mathfrak{S}(X)$ (grazie all'omeomorfismo tra coni visto prima e alla commutatività della costruzione), H è un'omotopia tra id_X e \mathbf{p}_X come

nel caso semplice e se \mathfrak{X} è il completato formale di X lungo $X - X_0$ allora H_X stabilizza \mathfrak{X}_η e lo contrae su $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$.

Vediamo dunque nel caso generale quello che possiamo dire riguardo $\mathfrak{S}(X)$: consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 W_0 = V_0 \times_U V & \xrightarrow{\text{imm. tor. semplice}} & & & \\
 \downarrow \pi_1 & \searrow \pi_2 & & & \\
 V_0 = \delta^{-1}(X_0) & \xrightarrow{\quad} & V & \xleftarrow{\text{étale}} & W = V \times_U V \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \text{étale} \\
 X_0 & \xrightarrow{\quad} & X & \xleftarrow{\quad} & U & \xleftarrow{\delta} & V
 \end{array}$$

induce

$$\mathfrak{S}(W) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1^\triangleright} \\ \xrightarrow{\pi_2^\triangleright} \end{array} \mathfrak{S}(V) \xrightarrow{\delta^\triangleright} \mathfrak{S}(U) \quad (*)$$

che è esatto nella categoria degli insiemi e per compattezza di $\mathfrak{S}(U)$ e $\mathfrak{S}(V)$ e la continuità di δ^\triangleright lo è anche in quella degli spazi topologici.

Per terminare la descrizione di $\mathfrak{S}(X)$ ci occorre il seguente lemma, del quale tralasciamo la dimostrazione:

Lemma 3.3.3. *Sia U un aperto di X e $\delta : V \rightarrow U$ una pre-carta étale, $W = V \times_U V$, $Y = V \times_U V \times_U V$. Per ogni punto ζ di $\Xi(W)$ (rispettivamente di $\Xi(Y)$) tale che $\pi_i(\zeta) = \pi_j(\zeta)$, per $i, j \in \{1, 2\}$ (risp. per $i, j \in \{1, 2, 3\}$) allora π_i e π_j inducono la stessa applicazione da $\mathfrak{S}(W(\zeta))$ (risp. $\mathfrak{S}(Y(\zeta))$) verso $\mathfrak{S}(V(\xi))$*

Sia dunque $\delta : V \rightarrow U$ una pre-carta étale, $\xi \in \Xi(U)$ e $\zeta \in \Xi(V)$ con $\nu(\zeta) = \xi$. A meno di restringere U e V (affinchè ζ sia il solo elemento di $\Xi(V)$ sulla fibra di ξ) possiamo supporre che l'applicazione $\delta^\triangleright : \mathfrak{S}(V) \cap r^{-1}(\zeta) \rightarrow \mathfrak{S}(U) \cap r^{-1}(\xi)$ sia surgettiva. É anche iniettiva dato che se $\delta^\triangleright(y) = \delta^\triangleright(y')$ per l'esattezza di (*) esiste un punto w di $\mathfrak{S}(W) = \mathfrak{S}(V \times_U V)$ tale che $\pi_1^\triangleright(z) = y$ e $\pi_2^\triangleright(z) = y'$ ma per il lemma precedente le due proiezioni inducono il medesimo morfismo e dunque $y = y'$.

Identifichiamo questi coni: se $\zeta, \zeta' \in \Xi(V)$ hanno la stessa immagine via δ allora per quanto appena visto esiste un punto ξ di $\Xi(Y) = \Xi(V \times_U V)$

tale che $\pi_1(\xi) = \zeta$ e $\pi_2(\xi) = \zeta'$. Consideriamo il diagramma di pull-back

$$\begin{array}{ccc} Y = V \times_U V \times_U V & \xrightarrow{\pi_{12}} & W \\ \downarrow \pi_{13} & & \downarrow \pi_1 \\ W & \xrightarrow{\pi_1} & V \end{array}$$

siano $\zeta, \xi \in W$ due punti con uguale immagine σ_i via π_i e sia η un loro pull-back, allora per il lemma precedente le frecce del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(Y(\eta)) & \xrightarrow{\pi_{12}^\rightarrow} & \mathfrak{S}(W(\zeta)) \\ \downarrow \pi_{13}^\rightarrow & & \downarrow \pi_1^\rightarrow \\ \mathfrak{S}(W(\zeta')) & \xrightarrow{\pi_1^\rightarrow} & \mathfrak{S}(V(\sigma_1)) \\ & \searrow \pi_2^\rightarrow & \downarrow \pi_2^\rightarrow \\ & & \mathfrak{S}(V(\sigma_2)) \end{array}$$

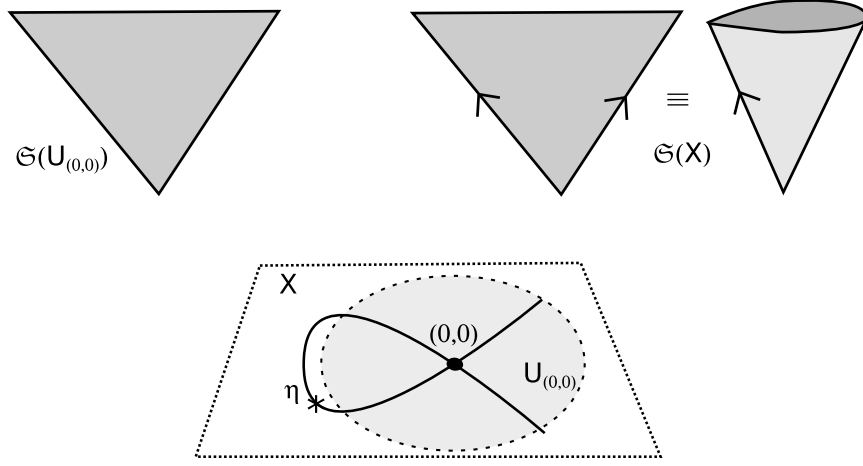
sono degli isomorfismi e dunque $\mathfrak{S}(V(\zeta))$ si identifica con $\mathfrak{S}(V(\zeta'))$.

Esempio 3.3.4. Consideriamo l'immersione toroidale non semplice dell'esempio iniziale, $X_0 = \mathbb{A}_k^2 - \{Y^2 = X^2(X+1)\} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^2$. Tramite la pre-carta étale in $(0,0)$ si ha che $\mathfrak{S}(U_{(0,0)})$ è un cono 2-dimensionale con 2 facce di dimensione 1 corrispondenti a η_1 e η_2 , i punti generici di, rispettivamente, $\{(U - VZ)\}$ e $\{(U + VZ)\}$. Dato che $\delta(\eta_1) = \delta(\eta_2) = \eta_3$, con η_3 il punto generico di $\{Y^2 = X^2(X+1)\}$, le due facce 1-dimensionali sono, nel cono di X , identificate. Dunque $\mathfrak{S}(X)$ sarà omeomorfo a un cono puntato su una circonferenza.

3.4 Applicazione ai divisori a intersezione trasversa

Sia D un divisore (de Cartier) e $Supp(D)$ il suo supporto. Diciamo che D è a *intersezione trasversa semplice* se per ogni $x \in Supp(D)$ esistono z_1, \dots, z_d , completabili a un sistema regolare di parametri in $\mathcal{O}_{X,x}$, tali che $\mathcal{O}_{D_{red},x}$ sia isomorfo a $\mathcal{O}_{X,x}/(z_1 \dots z_d)$, ovvero che la riduzione di D sia localmente simile a un'intersezione di iperpiani coordinati. Un divisore è a *intersezione trasversa* se esiste in ogni punto un morfismo étale surgettivo δ tale che δ^*D sia a intersezione trasversa semplice.

Il parallelismo con le immersioni toroidali semplici e le immersioni toroidali è evidente, ciò nonostante per poter supporre che l'immersione aperta



del complementare di $Supp(D)$ in X sia toroidale è necessario d'ora in poi supporre che k sia perfetto (ovvero che ogni estensione algebrica di k sia separabile).

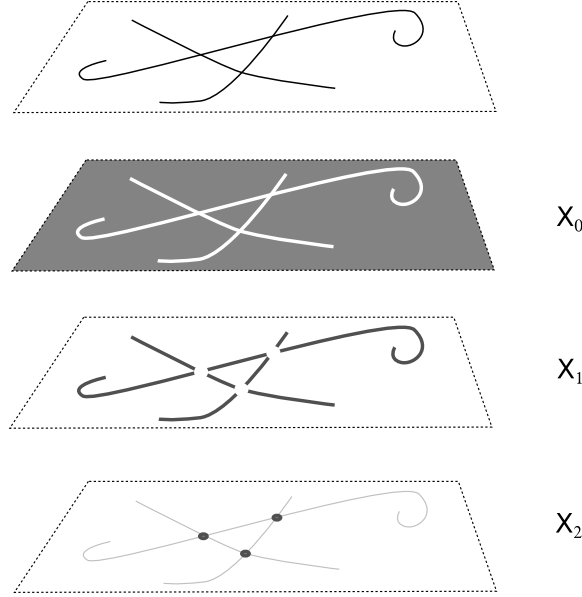
Vogliamo ora costruire il complesso simpliciale associato a un divisore a intersezione trasversa (semplice) D . L'idea è di associare a ogni punto generico di D un punto, che formerà lo 0-scheletro del complesso, e connettere tali punti a seconda delle intersezioni di codimensione 1, e così via. Vediamo di essere più precisi: sia X uno schema localmente noeteliano, eccellente (per la definizione di schema eccellente si veda *EGA IV*, 7.8) e sia $X_0 = X - Supp(D)$ e X_{n+1} l'insieme dei punti regolari di $\overline{X_n} - X_n$. Gli $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono una stratificazione di X (l'ipotesi di intersezione trasversa garantisce che la dimensione scenda di 1 a ogni passo).

Siano dunque $X_{1,gen}$ i punti generici di $Supp(D)$, dato che vogliamo formare lo 0-scheletro occorre imporre un ordine totale \prec (la costruzione sarà evidentemente, a meno di omeomorfismo canonico, indipendente dalla scelta di tale ordine), che definisce per ogni x un insieme simpliciale $\Delta_{D,x}$ su

$$(D, x)_{gen} = \{\xi \in X_{1,gen} \mid x \in \overline{\{\xi\}}\}.$$

Se $x \in \overline{\{y\}}$ allora $(D, x)_{gen} \subset (D, y)_{gen}$ induce un'applicazione simpliciale $\Delta_{D,x} \rightarrow \Delta_{D,y}$ e definiamo

$$\Delta(D) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in Supp(D)}} \Delta(D, x),$$



e dato che la permutazione dei punti del 0-scheletro commuta con la specializzazione, il complesso simpliciale $\Delta(D)$, a meno di omeomorfismo canonico, non dipende da \prec .

Per quanto riguarda il q -scheletro di $\Delta(D)$, è l'unione dei q -scheletri di $\Delta(D, x) \subset \Delta(D)$; sia dunque $x \in \text{Supp}(D)$ e z_1, \dots, z_d tali che $\mathcal{O}_{D_{red}, x}$ sia isomorfo a $\mathcal{O}_{X, x}/(z_1 \dots z_d)$. È evidente che $\Delta(D) = \Delta(D_{red})$, i semplici non degeneri del q -scheletro di $\Delta(D, x)$ sono in biezione con i sottoinsiemi di cardinalità $q + 1$ di $(D, x)_{gen} \simeq \{z_1, \dots, z_d\}$, e si dimostra per induzione senza particolari difficoltà che

$$\eta \mapsto \overline{\{\eta\}} \cap \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$$

induce una biezione tra i punti generici di X_q che specializzano in x e i chiusi $\mathcal{O}_{X, x}/(z_{i_1} \dots z_{i_q})$ e dunque tra l'insieme dei punti generici di X_{q+1} e i complessi non degeneri del q -scheletro di $\Delta(D)$.

È facile verificare che per ogni morfismo étale e surgettivo $\delta : X' \rightarrow X$, il divisore δ^*D è a intersezione trasversa: se z_1, \dots, z_n formano un sistema regolare di parametri per m_x , $x = \delta(y)$ e $\mathcal{O}_{D_{red}, x} \simeq \mathcal{O}_{X, x}/(z_1 \dots z_d)$, allora $\delta^\# z_1, \dots, \delta^\# z_n$ lo formano per δ^*D in y e $\mathcal{O}_{\delta^*D_{red}, y} \simeq \mathcal{O}_{Y, y}/(\delta^\# z_1 \dots \delta^\# z_d)$. Infine, è altrettanto facile vedere che la stratificazione di δ^*D in quanto divisore a intersezione trasversa è l'immagine inversa di quella di D e che se $y \in \text{Supp}(\delta^*D)$, $x \in \text{Supp}(D)$ sono tali che $\delta(y) = x$ allora δ induce un isomorfismo tra $\Delta(\delta^*D, y)$ e $\Delta(D, x)$, dato che $X_0 = X'_0$ visto che δ è étale.

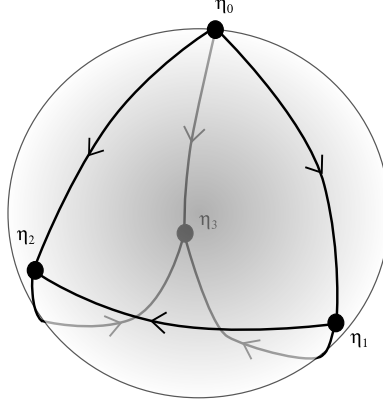


Figura 3.1: Il complesso simpliciale di $D = \sum \{X_i = 0\}$ in \mathbb{P}^n .

Vediamo di estendere questa costruzione ai divisori a intersezione trasversa (generici): la stratificazione resta la stessa, per quel che riguarda il complesso simpliciale sia $\delta : X' \rightarrow X$ un morfismo étale surgettivo tale che $D' = \delta^* D$ sia a intersezione trasversa. Consideriamo il diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X'' = X' \times_X X' & \xrightarrow{\pi_1} & X' \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \delta \\ X' & \xrightarrow{\delta} & X \end{array}$$

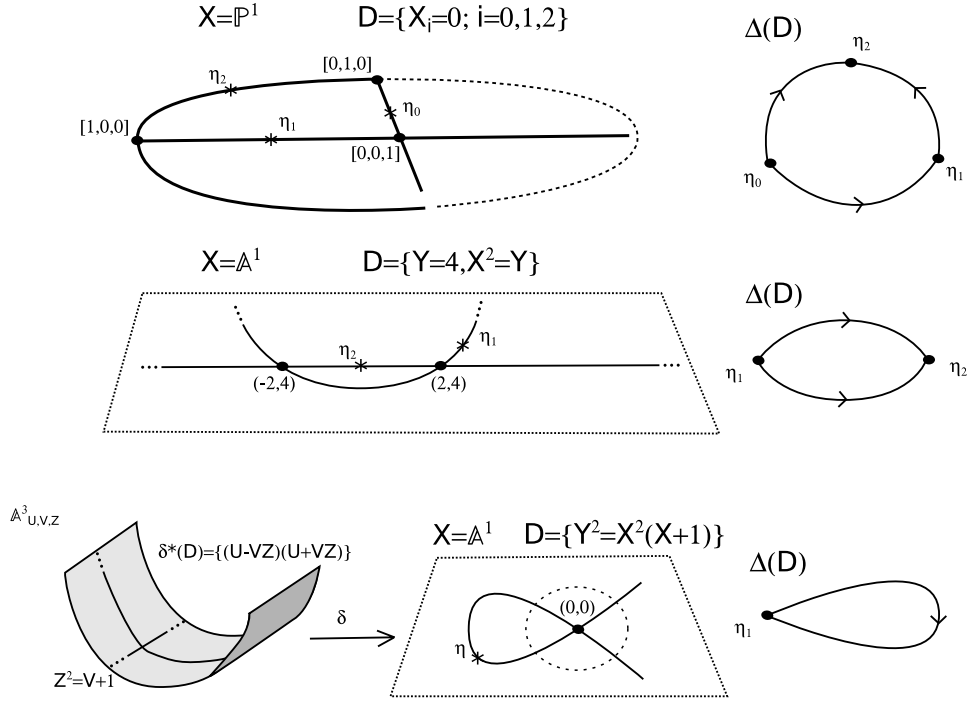
e sia D'' l'immagine inversa di D' in X'' , si tratta certamente di un divisore a intersezione trasversa, dato che le proiezioni sono étale, inoltre se $x'' \in X''$ ha uguale immagine x' tramite le due proiezioni, allora se z_1, \dots, z_d fanno parte di un sistema regolare di parametri tali che $\mathcal{O}_{D'_{red}, x'} = \mathcal{O}_{X', x'} / (z_1 \dots z_d)$, si ha che

$$\mathcal{O}_{D''_{red}, x''} = \mathcal{O}_{X'', x''} / (\pi_1^\# z_1 \dots \pi_1^\# z_d) = \mathcal{O}_{X'', x''} / (\pi_2^\# z_1 \dots \pi_2^\# z_d).$$

L'insieme simpliciale $\Delta(X'', x'')$ è dunque canonicamente isomorfo a $\Delta_{\{1, \dots, d\}}$ e le applicazioni indotte dalle proiezioni sono l'identità sullo 0-scheletro di $\Delta_{\{1, \dots, d\}}$, dunque inducono lo stesso morfismo su $\Delta(X'', x'')$.

Vogliamo dunque definire $\Delta(X)$ come l'equalizzatore del diagramma:

$$\Delta(D'') \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} \Delta(D'),$$



si tratta effettivamente di un insieme simpliciale, verifichiamo che non dipenda da δ , sia dunque $\tilde{\delta}: \tilde{X} \rightarrow X$ un altro morfismo étale surgettivo tale che $\tilde{\delta}^*D$ sia a intersezione trasversa. Allora utilizzando il diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccccc}
 X'' = X' \times_X X' & \longrightarrow & X' & \longleftarrow & X^* = X' \times_X \tilde{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\delta} & X & \longleftarrow & \tilde{X}' \\
 \uparrow & & \uparrow \tilde{\delta} & & \uparrow \\
 X^* = X' \times_X \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}' & \longleftarrow & \tilde{X}'' = \tilde{X}' \times_X X' \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & X^{**} = X^* \times_X X^*
 \end{array}$$

e il fatto che due punti con uguale proiezione inducono lo stesso morfismo sul complesso associato al punto immagine, possiamo dimostrare che esiste un isomorfismo canonico tra il complesso indotto da δ e quello indotto da $\tilde{\delta}$. Per concludere la descrizione di $\Delta(D)$, dato che δ è étale, il diagramma seguente

risulta esatto

$$X''_{q+1,gen} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} X'_{q+1,gen} \xrightarrow{\delta} X_{q+1,gen},$$

dunque i q -simplessi non degeneri di $\Delta(D)$ sono in bigezione con i punti generici di X_{q+1} .

3.5 Applicazione al completato formale di uno schema lungo un divisore a intersezione trasversa

Il teorema enunciato nell'introduzione sarà conseguenza del seguente:

Teorema 3.5.1. *Sia X un k -schema localmente algebrico con k campo perfetto, D un divisore a incroci normali e sia \mathfrak{X} il completato di X lungo $Supp(D)$. L'immersione $X - Supp(D) \hookrightarrow X$ è un'immersione toroidale (possiamo supporre, a meno di restringerci a un intorno di $Supp(D)$, che X sia regolare) e il poliedro conico spuntato $\mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$ è canonicamente omeomorfo allo spazio topologico $|\Delta(D)| \times]0, +\infty[$.*

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa che $X - Supp(D) \hookrightarrow X$ è un'immersione toroidale: basta dimostrare che se $\delta : X' \rightarrow X$ è un morfismo étale surgettivo tale che $D' = \delta^*D$ è a intersezione trasversa allora $X' - Supp(D') \hookrightarrow X'$ è un'immersione toroidale *semplice*. Sia x' un punto chiuso di X' , esistono $z_1, \dots, z_d \in \mathcal{O}_{X,x}$ liberi tali che $\mathcal{O}_{D'_{red},x'} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/(z_1 \dots z_d)$, e che si completa a un sistema regolare di parametri $z_1, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_n$ (dove n è la dimensione di X in x) che generano m_x ; allora esiste un intorno aperto U tale che gli z_i siano in $\mathcal{O}_X(U)$ e D'_{red} sia definito dagli z_1, \dots, z_d su U . Dato che x è un k -punto (e dunque $\kappa(x)$ è un'estensione finita separabile di k dato che k è perfetto) il corollario 17.15.4 del capitolo IV di EGA garantisce che il morfismo $\gamma : U \rightarrow \mathbb{A}_k^n = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$ indotto da

$$\begin{array}{ll} T_i & \mapsto z_i \quad \text{se } 1 \leq i \leq d \\ T_i & \mapsto z_i + 1 \quad \text{se } d+1 \leq i \leq n \end{array}$$

sia étale in x e dunque, a meno di restringersi, lo sia su tutto U . A meno di restringersi di nuovo possiamo supporre inoltre che gli $z_i + 1$ siano invertibili su $\mathcal{O}_X(U)$ per $d+1 \leq i \leq n$. Allora $U \cap (X' - Supp(D')) = \gamma^{-1}(\{T_i \neq 0, 1 \leq i \leq n\})$ è immagine inversa dell'orbita aperta di \mathbb{A}_k^n che è una varietà torica sotto l'azione di \mathbb{G}_m^n . Se y non è un punto chiuso, sia $x \in \overline{\{y\}}$ un punto chiuso nello strato di y , allora se U è un intorno di y contenente x possiamo definire un morfismo étale su x come abbiamo appena fatto e questo risulta essere una

carta étale anche per y , e dato che la stratificazione di X data all'inizio del paragrafo precedente coincide con la stratificazione di X come immersione toroidale si ha che è effettivamente un'immersione toroidale semplice.

Passiamo all'omeomorfismo tra $\mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$ e $\Delta(D) \times]0, +\infty[$: sia $x' \in X'_q$ un punto chiuso, allora

$$\mathcal{O}_{D'_{red, x'}} \simeq \mathcal{O}_{X', x'} / (z_{i_1}, \dots, z_{i_{q+1}})$$

e $\gamma(x)$ è un punto chiuso di $\{T_{i_1} = \dots = T_{i_{q+1}}\}$ che è contenuto nell'aperto invariante $V = \{T_j \neq 0, j \notin \{i_1, \dots, i_{q+1}\}\} \subset \mathbb{A}_k^n$. Dato che è un aperto invariante, restringendosi a questo aperto sappiamo che γ induce un isomorfismo tra i coni $\mathfrak{S}_0(U)$ e $\mathfrak{S}_0(V) = \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_{i_1} = \dots = t_{i_{q+1}} = 0, t_j \geq 0, j \notin \{i_1, \dots, i_{q+1}\}\}$.

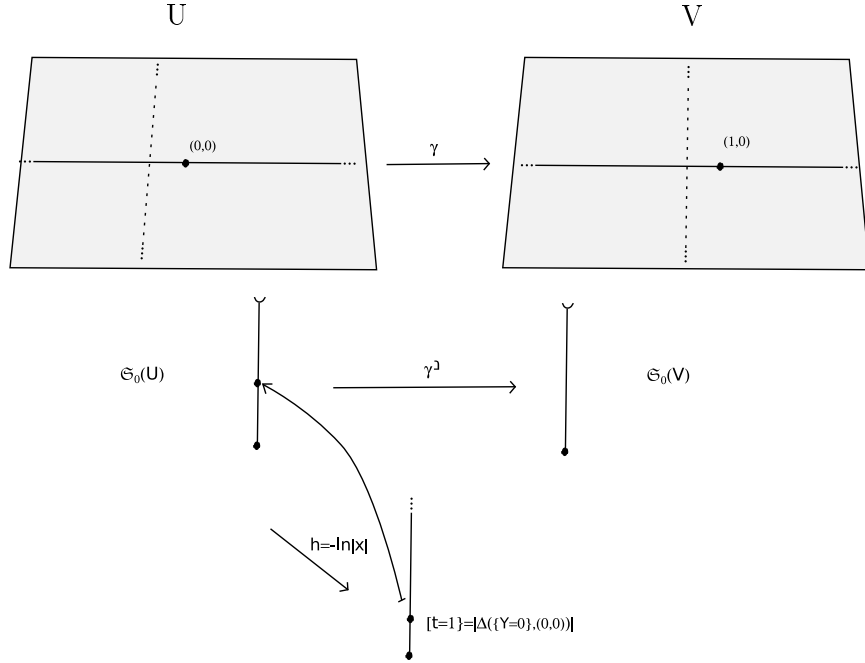


Figura 3.2: Il teorema applicato al divisore $Y = 0$ nel punto $(0, 0)$.

Ora, per la Proposizione 3.1.6, il morfismo

$$h = (-\ln|z_1|, \dots, -\ln|z_n|) : \rho_{X'}^{-1}(X'_0) \cap U^\triangleright \rightarrow \mathbb{R}^n$$

realizza un isomorfismo tra $\mathfrak{S}_0(U)$ e il cono simpliciale

$$\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_{i_k} \geq 0, k = 1, \dots, d; t_j = 0, j \notin \{i_1, \dots, i_{q+1}\}\}.$$

Tale isomorfismo non dipende dai z_i e dunque la sua inversa induce un omeomorfismo tra

$$|\Delta(D, x)| = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum_{i=1}^n t_j = 0 \forall j \notin \{i_1, \dots, i_{q+1}\}\}$$

e

$$\mathfrak{S}_0(U) \cap \{x \in \rho_{X'}^{-1}(X'_0) \cap U^\triangleright \mid |D_{red}|(x) = e^{-1}\} \subset \mathfrak{S}_0(X').$$

Tali omeomorfismi si incollano in un unico omeomorfismo i tra $|\Delta(D')|$ e il poliedro conico spuntato $\mathfrak{S}_0(X')^*$ di modo che $i \circ \pi : |\Delta(D')| \rightarrow \mathfrak{S}_0(X')^*/\mathbb{R}_{>0}$ sia un omeomorfismo. Per dimostrare il medesimo risultato su X , ci si restringe prima ai $\Delta(D, x)$ e ai $X(\xi)$, dove per i teoremi di omeomorfismi locali sui complessi simpliciali e sul cono \mathfrak{S}_0 , sappiamo essere vera la tesi. Su $\Delta(D)$, possiamo incollare ad un unico omeomorfismo dato che la realizzazione geometrica commuta con il limite induttivo, il che da l'omeomorfismo $|\Delta(D)| \simeq \mathfrak{S}_0(X)/\mathbb{R}_{\geq 0}$ e infine l'omeomorfismo $\mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta \simeq |\Delta(D)| \times]0, +\infty[$. \square

Sia $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$, questo insieme è stabilizzato da \mathbf{p}_X che induce una retrazione di \mathfrak{X}_η su $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$, e tale costruzione dipende solo da \mathfrak{X} e non dall'intorno regolare di $Supp(D)$ in X .

Teorema 3.5.2. *Sia X un k -schema localmente algebrico con k campo perfetto e $Y \subset X$ un sottoschema chiuso. Se $f_1 : X_1 \rightarrow X$ e $f_2 : X_2 \rightarrow X$ sono due morfismi propri che realizzano un isomorfismo tra $X_1 - f_1^{-1}(Y)$ (rispettivamente tra $X_2 - f_2^{-1}(Y)$) e $X - Y$ e l'immagine inversa di Y tramite f_1 e f_2 è un divisore a intersezione trasversa, allora gli spazi topologici $|\Delta(f^{-1}(Y))|$ e $|\Delta(f^{-2}(Y))|$ sono canonicamente omotopi.*

Dimostrazione. Se $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1$ e \mathfrak{X}_2 sono i completati dei tre schemi lungo i sottoschemi chiusi, si ha allora che i morfismi di k -schemi formali \hat{f}_1 e \hat{f}_2 inducono degli isomorfismi $\widehat{f_{1,\eta}}$ e $\widehat{f_{2,\eta}}$ sulle fibre generiche. Se indichiamo allora con $\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_i}$ la restrizione di \mathbf{p}_{X_i} alle fibre generiche,

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_2} \circ \widehat{f_{2,\eta}}^{-1} \circ \widehat{f_{1,\eta}} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2)$$

e

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_1} \circ \widehat{f_{1,\eta}}^{-1} \circ \widehat{f_{2,\eta}} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1)$$

sono equivalenze d'omotopia reciproche e per il teorema precedente si ha l'equivalenza omotopica tra $|\Delta(f^{-1}(Y))|$ e $|\Delta(f^{-2}(Y))|$. \square

Per concludere, due applicazioni delle costruzioni fatte finora: per prima cosa, dato che per un teorema Hironaka se k ha caratteristica zero e $X - Y$ è denso e regolare in X allora esiste sempre un blow-up $f : X' \rightarrow X$ con $f^{-1}(Y)$ divisore a intersezione trasversa, si allora che in questo caso dunque il tipo di omotopia di \mathfrak{X}_η è sempre quello di un CW -complesso.

Come secondo risultato, osserviamo che se $X \hookrightarrow Y$ è una compattificazione di X schema localmente algebrico su k campo perfetto, e D è il suo bordo, allora Y è proprio e dunque $Y^\triangleright = Y^{an}$. Allora $Y^{an} - \rho^{-1}(D) = Y^\triangleright - \rho_Y^{-1}(D) = X^{an} \subset Y^{an}$, e dato che $X^\triangleright = r_Y^{-1}(X) = Y^\triangleright - r_Y^{-1}(D)$, si ha che

$$\begin{aligned} X^{an} - X^\triangleright &= (Y^\triangleright - \rho_Y^{-1}(D)) - (Y^\triangleright - r_Y^{-1}(D)) = \\ &= r_Y^{-1}(D) - \rho_Y^{-1}(D) = \mathfrak{X}_\eta \end{aligned}$$

con \mathfrak{X} completato di Y lungo D . Dunque, se $X \hookrightarrow Y_1$ e $X \hookrightarrow Y_2$ sono due compattificazioni tali che i bordi D_1 e D_2 sono divisori a intersezione trasversa, allora $|\Delta(D_i)|$ è omotopicamente equivalente a $\mathfrak{X}_{\eta,i}$, dove \mathfrak{X}_i è il completato di Y_i lungo D_i . Per quanto abbiamo appena osservato $\mathfrak{X}_{\eta,1} = \mathfrak{X}_{\eta,2}$ e dunque $|\Delta(D_1)|$ e $|\Delta(D_2)|$ sono omotopicamente equivalenti.

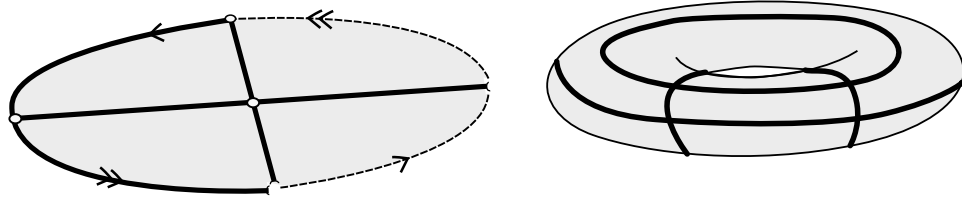


Figura 3.3: La compattificazione di \mathbb{G}_m^2 in \mathbb{P}_k^2 e $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$: i CW -complessi dei due bordi sono omotopicamente equivalenti a una circonferenza.

Bibliografia

- [1] A. Thuillier. *Géométrie toroidale e géométrie analitico non archimedeae. applicazione au type d'omotopia di certains schémi formali*
- [2] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert. *Non-Archimedean Analysis*
- [3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*
- [4] V.G. Berkovich. *Spectral Theory and Analytic Geometry over non-Archimedean fields*
- [5] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné. *Éléments di géométrie algebrico*
- [6] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat. *Toroidal Embeddings I*
- [7] V.I. Danilov. *The geometry of toric varieties*
- [8] V.G. Berkovich. *Vanishing cycles for formal schemes II*
- [9] L. Fantini *Courbes analitici non archimedee e réduction semi-stable (Mémoire di Master 2)*